APPLICAZIONI di MATEMATICA A.A. 2010-2011

Traccia della lezione del 3 novembre 2010

November 4, 2010

1 Funzioni analitiche e limitate:proprietà

Il comportamento di una funzione nell'intorno di una singolarità eliminabile è illustrato dal seguente teorema.

Teorema . *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora s_0 è eliminabile SE E SOLO SE f è limitata in un intorno di s_0.*

Si osservi che tale proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Infatti, come è ben noto, per le funzioni reali di variabile reale la limitatezza di una funzione φ nell'intorno di un punto x_0 NON implica l'esistenza del limite $\lim_{x\to x_0} \varphi(x)$. Ad esempio, è sufficiente considerare la funzione $\varphi(x) = \sin(1/x)$, che è limitata in un intorno di $x = 0$, ma per la quale il $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ non esiste.

Teorema (di Liouville). *Sia f analitica e limitata in tutto il piano complesso. Allora f è costante.*

Anche questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Ad esempio, la funzione reale $\sin x$ è limitata e sviluppabile in serie di potenze, ma non è costante!

Dal Teorema di Liouville si hanno poi le due seguenti conseguenze:

Corollario 1. *Sia f priva di singolarità al finito e all'infinito. Allora f è costante.*

Corollario 2 (Teorema fondamentale dell'algebra di D'Alembert) *Ogni polinomio P di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in C.*

Vale infine il seguente:

Teorema *Sia f analitica in un aperto Ω, e sia f non identicamente nulla. Allora gli eventuali zeri di f in Ω sono isolati.*

Anche questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale, come illustra, ad esempio, la funzione reale

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

per la quale $x = 0$ è uno zero non isolato.

Esercizio Sia f analitica in un intorno V di s_0. Provare che

$$f(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - s_0)^2} ds,$$

dove γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice chiusa, percorsa in senso positivo, contenuta in V e contenente all'interno il punto s_0.

2 Trasformata Zeta

Dal volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

- Richiami sulle serie di potenze: massimo limite, raggio di convergenza, criterio di Hadamard - Cap. 3.2 tutto.
- Definizione di trasformata zeta - Cap. 3.3: Def. 3.1 e 3.2, Prop. 3.2, 3.3, 3.4.
- Antitrasformata Zeta - Cap. 3.11 : interamente, con gli esempi.
- Calcolo dell'antitrasformata con la teoria dei residui - Cap. 3.12 : Formula (3.48) ed Esempi 3.13, 3.14.
- La proprietà del valore iniziale - Cap. 3.10 - Teor. 3.5.