APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2010-2011

ESERCIZI parte 2 e esempio compito

October 27, 2010

1 Integrale in $\mathbb{C}$

Esercizio 1.1 - Per le funzioni razionali

$$\begin{aligned} f_1(s) &= \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}; & f_2(s) &= \frac{7s^3 + 6}{s^2 + 4s + 5}; & f_3(s) &= \frac{s}{s^2 - 1} \\ f_4(s) &= \frac{3s - 9}{s^3 + 6s^2 + 5s}; & f_5(s) &= \frac{s}{(s + j)^2}; & f_6(s) &= \frac{s}{s^2 + j}. \end{aligned}$$

calcolare

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f_i(s) ds$$

dove $\gamma(t) = 2e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.2 - Per le funzioni non razionali

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \frac{s + 1}{e^s(s - 1)}; & g_2(s) &= \frac{e^s - 1}{s(s - 3)(s - 6)}; & g_3(s) &= \frac{\sin s}{s^2 - 9s}; \\ g_4(s) &= \frac{\sin(1/s)}{s^2 - 5s}; & g_5(s) &= \frac{1 - \cos s}{s^3 - s^2}; & g_6(s) &= \frac{s^2 + 4s + 3}{e^s}; \\ g_7(s) &= \frac{\sin(2s)}{s^2 - 2s}; & g_8(s) &= \frac{\sin(2s)}{(s^2 - 6s)^2}; & g_9(s) &= \frac{se^{1/s}}{s^2 - 9}. \end{aligned}$$

calcolare :

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f_i(s) ds$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Esercizio 1.3 - Per le funzioni g_i definite nell'Esercizio 1.2, calcolare i seguenti integrali:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} [g_i(s) + s] ds \\ & \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} [g_i(s) + \frac{1}{s}] ds \\ & \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} [g_i(s) + \frac{\sin s}{s}] ds \end{aligned}$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$.

1.1 Residuo all'infinito

Esercizio 2.1 - Per le funzioni di cui all'Esercizio 1.2, calcolare, se esiste, il Residuo all'infinito.

Esercizio 2.2 - Calcolare $\text{Res}[f, 0]$ e $\text{Res}[f, \infty]$ delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} f(s) &= \frac{\sin s}{s^2}; & f(s) &= \frac{\exp(1/s)}{s^2}; \\ f(s) &= \frac{\exp s}{s^2}; & f(s) &= s \cos\left(\frac{1}{s}\right); \\ f(s) &= \frac{5}{s} \cos 4s; & f(s) &= \exp(s); \\ f(s) &= \cos 5s; & f(s) &= \frac{3}{s} \sin \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

2 Esercizi "teorici"

Es. 1 Per le seguenti funzioni calcolare, se esiste, il residuo all'infinito

$$f_1(s) = s - |s|; \quad f_2(s) = s - 4 \exp(2s^3)$$

Es. 2 Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ avente una sola singolarità al finito in $s = 0$, di tipo essenziale. Sia inoltre $s = \infty$ uno zero triplo. Quanto vale $\text{Res}[f, 0]$?

Es. 3 Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\text{Re } f = x^2 - y$; la funzione f è analitica?

Es. 4 Si può applicare il 2° Teor. dei Residui alle funzioni

$$f_1(s) = \frac{\sin 7s}{s^2 + 9s + 8}; \quad f_2(s) = \frac{\sin 7s}{(s^2 + 9s + 8) \exp(4s)};$$
$$f_3(s) = \frac{\exp(3s)}{(s^2 + 9s + 8)(\sin 7s)} \quad ?$$

Es. 5 Siano

$$F_1(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)}; \quad F_2(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)(s+11)}.$$

Le funzioni F_i sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = -7$? E in $s = \infty$?

Es. 6 Sia F una funzione razionale. Sono sviluppabili in serie di Laurent all'infinito le funzioni

$$G_1(s) = F(s)/\sin s; \quad G_2(s) = F(s)/\exp(5s) \quad ?$$

Es. 7 Sia F una funzione razionale con $F(0) = 1$. Sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = 0$ le funzioni

$$G_1(s) = e^{1/s} F(s); \quad G_2(s) = \frac{F(s)}{s};$$
$$G_3(s) = \frac{F(s)}{\sin(1/s)}; \quad G_4(s) = e^{-1/s} F(s) \quad ?$$

Es. 8 Sia f una funzione analitica in tutto il piano complesso. Quanto vale $\text{Res}[f, \infty]$?

Es. 9 Sia g analitica in un intorno V di $s = 7$ e $g'(7) = 5j$. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{g(s)}{(s-7)^2} ds$$

dove γ è una circonferenza di centro $s = 7$ contenuta in V e percorsa in senso positivo.

Es. 10 Ciascuna delle seguenti domande ha UNA E UNA SOLA RISPOSTA ESATTA. Si individui quale, giustificando la risposta.

▲ Domanda n.1 - E' applicabile il 2° Teorema dei Residui alla funzione

$$F(s) = \frac{2 + e^{1/s}}{\sin s} ?$$

- a) - No, perché F ha infinite singolarità.
- b) - Sì, perché F è limitata
- c) - No, perché $s = 0$ è sing. essenziale
- d) - Sì, perché F non è razionale.

▲ Domanda n.2 - Sia F priva di singolarità al finito e all'infinito. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) $F(0) = 0, F(1) = 1$
- b) $F(0) = 1, F(1) = 0$
- c) $F(0) = F(1)$
- d) $F(0) = 0, F(\infty) = 1$

▲ Domanda n.3 - Sia F una funzione razionale propria [i.e. $F = N/D$, con N e D polinomi tali che grado $N <$ grado D]. Sia poi $G(s) = 1/F(s)$. Allora:

- a) G ha almeno una singolarità essenziale
- b) G ha almeno una singolarità polare
- c) G ha almeno una singolarità non isolata
- d) G è limitata.

Risposte							
Domande	1	2	3	4	5	6	7

Scrivere il numero della risposta sopra alla corrispondente domanda

FAC SIMILE prova intermedia di APPLICAZIONI di MATEMATICA

• Domanda 1 Quale o quali delle seguenti funzioni è derivabile per ogni $s \in C$?

$$F_A = s - |s|, F_B = e^s - e^{2s}, F_C = (e^s - e^{2s})^{-1}$$

- 1) Nessuna delle altre risposte è vera.
- 2) F_B
- 3) F_B, F_C
- 4) F_A, F_B
- 5) Tutte e tre

• Domanda 2 Calcolare $\text{Res}[f, \infty]$ dove

$$f(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{3s^2 + 8}{s^3 + 4s^2 + 2}$$

- 1) -1
- 2) 0
- 3) -2
- 4) -3

• Domanda 3 La funzione

$$F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{e^z(z - \sin z)}$$

ha in $z = 0$:

- 1) una sing. essenziale
- 2) un polo doppio
- 3) un polo semplice
- 4) una sing. eliminabile

• Domanda 4 Calcolare $\text{Res}[f, 0]$ dove

$$f(s) = \sin(1/s^2) + \frac{3}{s}$$

- 1) 3
- 2) 0
- 3) -3
- 4) 1

• Domanda 5 Sia $z = (1 - j)^{1/4}$

- 1) $|z| = 2^{1/4}, \text{Arg}z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, \dots, 3.$
- 2) $|z| = 2^{1/4}, \text{Arg}z = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, \dots, 3.$
- 3) $|z| = 2^{1/8}, \text{Arg}z = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k = 0, \dots, 3.$
- 4) $|z| = 2^{1/8}, \text{Arg}z = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, \dots, 3.$

• Domanda 6 Calcolare

$$I = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \left[\frac{z+1}{z^2+2z-3} + z \sin z \right] dz$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

- 1) -2
- 2) 2

- 3) -1
- 4) 0
- 5) 1

• Domanda 7 Per quale o quali delle seguenti funzioni, la serie di Laurent all'infinito è priva di parte principale?

$$F_1(z) = \frac{z+4}{z-4}, F_2(z) = \frac{(z+4)e^{1/z}}{z-4}$$

$$F_3(z) = \frac{z+4}{(z-4)e^z}$$

- 1) soltanto F_1
- 2) F_1, F_3
- 3) F_1, F_2
- 4) F_2, F_3