

# APPLICAZIONI di MATEMATICA

## A.A. 2010-2011

### ESERCIZI parte 4

November 24, 2010

## 1 Trasformata di Laplace

**Esercizio 1.1** - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali è di classe  $\Lambda$ ? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per  $t < 0$ )

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-t^2}; & f_2(t) = t^7 + 14t^6; \\ f_3(t) = t \cos t; & f_4(t) = e^t \cos t^2; \\ f_5(t) = e^{t^2} \cos t; & f_6(t) = t^{-4}. \end{array}$$

**Esercizio 1.2** - Si calcoli l'ascissa di convergenza delle seguenti funzioni di classe  $\Lambda$ . (Si assuma che tali funzioni sono nulle per  $t < 0$ )

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = e^{-7t}; & f_2(t) = t^7 e^{7t}; \\ f_3(t) = t e^{-5t}; & f_4(t) = t \sin t e^{-4t}; \\ f_5(t) = e^{5t} \cos t; & f_6(t) = t^4 \cos t. \end{array}$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t \in [6, 15] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$
$$g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t \in [\pi, 4\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

**Esercizio 1.3** Quale o quali delle seguenti funzioni NON è la trasformata di Laplace di una funzione  $f \in \Lambda$  con  $\alpha_f = 3$ ?

$$F_1(s) = \frac{s+1}{s^2-16}; F_2(s) = \frac{s+1}{s^2-4s}; F_3(s) = \frac{s+1}{s^2-4s+3}.$$

## 2 Funzioni Reali Positive

**Esercizio 2.1** - Stabilire se le seguenti funzioni razionali sono RP oppure no.

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{s^4 + 10s^2 + 3}{s^3 + s}; & F_2(s) &= \frac{3s^2 + s + 18}{s^2 + 36s}; \\F_3(s) &= \frac{4s + 6}{s^2 + s}; & F_4(s) &= \frac{s^4 + s^2 + 3}{s^3 + s}; \\F_5(s) &= \frac{s^3 + 4s^2 - 4s - 1}{s^3 - s^2 + s - 1}; & F_6(s) &= \frac{3s + 5}{s^2 + 4s + 3}.\end{aligned}$$

Risposte : sono RP le funzioni  $F_1, F_2, F_5, F_6$ . Non lo sono le altre.

**Esercizio 2.2** - Usando il test delle funzioni dispari, stabilire quali delle seguenti funzioni è RP.

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{s^5 + 10s^3 + 3s}{s^4 + s^2 + 10}; & F_2(s) &= \frac{s^3 + 6s}{s^2 + 4}; \\F_3(s) &= \frac{s^3 + 6s}{s^2 + 8}; & F_4(s) &= \frac{s^6 - 1}{s^5 - s}; & F_5(s) &= \frac{s^6 + 1}{s^5 + s}.\end{aligned}$$

Risposte: lo è soltanto la funzione  $F_2$

**Esercizio 2.3** - Per le funzioni  $F_i$ , con  $i \neq 2$ , di cui all'Esercizio 2.2, quale o quali delle condizioni per la positività nel test delle "4 condizioni" non sono verificate?

**Esercizio 2.4** - Determinare per quali valori del parametro reale  $\lambda$  sono RP le funzioni

$$\begin{aligned}F_1(s) &= \frac{s^4 + \lambda^2 s^2 + 3}{s^3 + s}; & F_2(s) &= \frac{s^2 - \lambda s + 6}{\lambda^2 s^2 + 4s}; \\F_3(s) &= \frac{4s + \lambda + 1}{s^2 + s}; & F_4(s) &= \frac{s^2 + 4}{s^3 + \lambda^2 s}; & F_5(s) &= \frac{s + \lambda - 1}{s^2 + s}.\end{aligned}$$

Lo svolgimento completo dell'Esercizio per le funzioni  $F_1, F_2, F_3$  è in Cap. 2.18 del volume M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

Risposte:

$$F_1 : |\lambda| \geq 2;$$

$$F_2 : \lambda \in [-2/3, 0]$$

$$F_3 : \lambda \in [-1, 3]$$

$$F_4 : |\lambda| \geq 2$$

$$F_5 : \lambda \in [1, 2].$$

**Esercizio 2.5** - Dopo aver verificato la positività delle seguenti funzioni, si determinino le reti RLC che hanno tali funzioni come impedenza e ammettenza.

$$F_1(s) = \frac{s^3 - 3s^2 + 4s - 12}{s^4 - 3s^3 + 9s^2 - 27s}$$
$$F_2(s) = \frac{s+1}{s+4}; F_3(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+8};$$
$$F_4(s) = 6s + 8 + \frac{15}{s+5}; F_5(s) = \frac{s^3+4s}{s^2+2}.$$

(Suggerimento: numeratore e denominatore di  $F_1$  si annullano in  $s = 3$ )

**Esercizio 2.6** - Usando il criterio di Talbot, stabilire se le seguenti funzioni razionali sono RP oppure no.

$$F_1(s) = \frac{36s^3 + 48s^2 + 21s + 3}{36s^3 + 42s^2 + 16s + 2};$$
$$F_2(s) = \frac{6s^3 + s^2 + 4s + 1}{s^3 + 3s^2 + 4s + 1};$$
$$F_3(s) = \frac{2s^3 + 2s^2 + 4s + 1}{s^3 + s^2 + 2s + 1};$$
$$F_4(s) = \frac{s^4 + s^2 + 3}{s^3 + s};$$
$$F_5(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 4s + 1}{2s^3 + s^2 + 4s + 1}.$$

Risposte : sono RP le funzioni  $F_1, F_3, F_5$ . Non lo sono le altre.

**Esercizio 2.7** - Quale o quali dei seguenti polinomi è un polinomio di

Hurwitz?

$$P_1(s) = 7s^3 + 5s^2 + 6s + 4$$

$$P_2(s) = 8s^4 + 5s^3 + 4s^2 + 5s + 3$$

$$P_3(s) = 6s^3 + 3s + 4$$

$$P_4(s) = s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 4s + 5$$

$$P_5(s) = 5s^4 + 4s^2 + 8s^2 + 2s + 1$$

$$P_6(s) = 7s^3 + 5s^2 + 2s + 8.$$

Risposte lo sono i polinomi  $P_1, P_4, P_5$ ; non lo sono gli altri.