

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2010-2011

traccia delle lezioni del 14 e 16 marzo 2011

March 17, 2011

1 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in V* ogni applicazione $\|\cdot\|$

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} \|f\| \geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| & \forall f, g \in V \end{array}$$

e lo spazio V si chiama *spazio normato*.

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, T]$, ossia $V = C[0, T]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0, T]$ le seguenti ($f \in C[0, T]$):

$$\begin{aligned} \|f\|_M &= \max_{t \in [0, T]} |f(t)| \\ \|f\|_1 &= \int_0^T |f(t)| dt \\ \|f\|_2 &= \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da

$$d(f, g) = \|f - g\| \quad (f, g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0, T]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) $(f, g \in C[0, T])$:

$$d_M(f, g) = \|f - g\|_M = \max_{t \in [0, T]} |f(t) - g(t)|$$

$$d_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_0^T |f(t) - g(t)| dt$$

$$d_2(f, g) = \|f - g\|_2 = \left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1 - t)$, $g(t) = t/2$ e sia $T = 1$. Si verifichi che in $C[0, 1]$, per le distanze sopra definite si ha

$$d_M(f, g) = 1/2, \quad d_1(f, g) = 1/8.$$

2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

e tale limite è indipendente da a, b , allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =_{def} \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$ non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$) e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \quad (2)$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4 + 1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4 + 1} dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

3 Gli spazi L^p

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$. Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$ se $|f|^p$ è integrabile (in senso

improprio) in $\mathbb{R}$ ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1$, f si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici). In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da ($f, g \in L^1(\mathbb{R})$)

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad d_{L^1}(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| dt.$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da ($f, g \in L^2(\mathbb{R})$)

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad d_{L^2}(f, g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$: ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$ ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Vale il seguente:

Teorema Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

converge se e solo se $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia se e solo se f è assolutamente integrabile sull'intero asse reale.

4 Trasformata di Fourier in L^1

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3)$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{(+)}$$

(*) si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e (+) *Trasformata seno di Fourier*.

5 Antitrasformata

Vale il seguente teorema.

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L . Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4)$$

La formula (4) è detta formula dell'antitrasformata di Fourier.

Si osservi che (3) è una definizione e vale sotto la sola condizione $f \in L^1(\mathbb{R})$. La formula dell'antitrasformata (4) è invece conseguenza di un Teorema e richiede una condizione aggiuntiva, ossia che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L .

6 Prime proprietà della trasformata di Fourier in L^1

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F , ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$.*

Corollario. *La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ può non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è di classe C^1 e si ha:*

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j \frac{d}{d\omega} F(\omega).$$

Si osservi che le due ipotesi " $f \in L^1(\mathbb{R})$ " e " $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ " sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f , data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g , data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha " $g \notin L^1(\mathbb{R})$ " e " $tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ".

Si osservi inoltre che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente, come illustra l'esempio della trasformata dell'impulso esponenziale, che sarà analizzato la prossima lezione.

Dal teorema precedente seguono poi i seguenti:

Corollario 1 *Sia $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, \dots, N$. Allora la trasformata di Fourier F di f è una funzione di classe $C^N(\mathbb{R})$.*

Corollario 2 *Sia f a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. Sia f assolutamente integrabile in $[a, b]$. Allora f è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata F è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

7 Esempi

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f_R(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_R(\omega) = 2ML \operatorname{sinc}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1} \sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

Si osservi che F_R è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_R \in C^\infty(\mathbb{R})$, ma $F_R \notin L^1(\mathbb{R})$. Quindi, in generale, in $L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier non può essere iterata.

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f_T(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_T(\omega) = \frac{2M(1 - \cos \omega)}{\omega^2} \text{ per } \omega \neq 0, F_T(0) = M.$$

ossia, usando le formule di duplicazione del coseno,

$$F_T(\omega) = M \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right)^2.$$

Si osservi che F_T è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_T \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_T \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f_G(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_G(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp((- \omega^2/2).$$

Anche in questo caso F_G è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_G \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_G \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f_E(t) = \exp(-|t|);$$

ovviamente $f_E \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha con facili calcoli, utilizzando le proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ (vedi paragrafo seguente)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Pertanto la trasformata di Fourier di f_E è la funzione

$$F_E(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Si osservi che F_E è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_E \in L^1(\mathbb{R})$ e $F_E \in C^\infty(\mathbb{R})$.

8 Derivazione

Teorema (Derivazione) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Tale risultato può essere provato integrando per parti l'integrale

$$\mathfrak{F}\{f'\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt$$

e usando la proprietà:

$$f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Corollario 1 Sia $f \in C^N(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, ..., $f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f^{(N)}\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $f'' \in L^1(\mathbb{R})$. allora

$$\mathfrak{F}\{f''\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi " $f \in C^1(\mathbb{R})$ " nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

9 Trasformata in L^1

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5)$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (5) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (6)$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ può accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinché la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario 2 Sia $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $F = o(\omega^{-n})$ per $|\omega| \rightarrow \infty$, ossia

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Il significato di tale Corollario è il seguente: "la trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ tende a zero (per $|\omega| \rightarrow +\infty$) tanto più velocemente, quanto più f è "liscia" (e con derivate in $L^1(\mathbb{R})$)"

Corollario 3 Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (5) e (6) coincidono).

10 La funzione integrale e la convoluzione

■ Integrazione -

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha il

Corollario Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = 0.$$

■ Convoluzione -

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama *prodotto di convoluzione* di f e g , e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (7)$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà:

$$\begin{array}{ll} \text{commutativa} & : \quad f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \\ \text{associativa} & : \quad (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \\ \text{distributiva} & : \quad (f_1 + f_2) * f_3 = (f_1 * f_3) + (f_2 * f_3) \end{array}$$

Tali proprietà, caratteristiche dell'usuale prodotto, giustificano il nome di prodotto di convoluzione dato a (7). Vale il seguente:

Teorema Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, $G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

Come vedremo nelle prossime lezioni, il prodotto di convoluzione interviene nella risolubilità di equazioni (o sistemi) differenziali lineari a coefficienti costanti.

In questa parte vengono brevemente presentati alcuni richiami sui numeri complessi, già visti nei precedenti corsi di matematica. Per maggiori dettagli si rimanda a tali corsi oppure alle tracce delle lezioni di Applicazioni di Matematica in questo stesso sito. Si raccomanda di prendere familiarità con questi concetti, anche svolgendo gli esercizi finali.

Nelle prossime lezioni verranno richiamate altre proprietà delle funzioni complesse e la teoria dei Residui, visti nel corso di Applicazioni di Matematica.

11 Richiami sui numeri complessi

11.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j , detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \operatorname{Re} z, b = \operatorname{Im} z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale*. Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario*.

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a + jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di z* , e si indica con $\bar{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A , il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Si chiama poi *modulo di z* , e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$:

$$\begin{aligned} z \bar{z} &= |z|^2 \\ \operatorname{Re} z &= (z + \bar{z})/2 \\ \operatorname{Im} z &= (z - \bar{z})/2j. \end{aligned}$$

11.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned} z + s &= (a + c) + (b + d)j \\ z - s &= (a - c) + (b - d)j \\ zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\ \frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \quad (\text{se } s \neq 0). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi.

11.3 Norma e distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio normato con norma data dal modulo, i.e. se $z = a + jb$ allora

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Pertanto $\mathbb{C}$ è anche uno spazio metrico, dove la distanza $d(z, s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z, s) = \|z - s\| = |z - s|.$$

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ .

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1, \quad (8)$$

avendosi

$$|z - 3 + 2j| = |z - (3 - 2j)|$$

(8) rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $z_0 = 3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

11.4 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di z* , e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a + jb$, indicando con ρ il modulo di z , risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$$

Le formule di passaggio sono quindi:

$$a = \rho \cos \theta$$

$$b = \rho \sin \theta$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases}$$

11.5 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del prodotto e del rapporto di tali due numeri ($s_1, s_2 \neq 0$). Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica: $s_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + j \sin \theta_2)$, si ha

$$s_1 s_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + j \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + j \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$(\sqrt{3} + j)^6 = -64.$$

11.6 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^i}{i!} + \dots$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:
2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:
3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y$, $e^{-jy} = \cos y - j \sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

Pertanto

$$e^s = e^x \cos y + j e^x \sin y.$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}|e^s| &= e^x = e^{\operatorname{Re} s}, \operatorname{Arg}(e^s) = y = \operatorname{Im}(s), \\ \operatorname{Re} e^s &= e^x \cos y = e^{\operatorname{Re} s} \cos \operatorname{Im} s, \\ \operatorname{Im} e^s &= e^x \sin y = e^{\operatorname{Re} s} \sin \operatorname{Im} s\end{aligned}$$

4. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

5. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

11.7 Esercizi

ESERCIZIO 1 - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$\begin{aligned}3j; -2; 1+j; -1-j; 1+j\sqrt{3}; 3-j\sqrt{3}; -j\sqrt{5}; \\ (1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j); -2+5j.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 2 - Utilizzando le formule di De Moivre, calcolare:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8; \frac{(3+3j)^9}{j^6}; \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

ESERCIZIO 3 - Sia

$$\begin{aligned}z_1 = e^{5j}, z_2 = e^{1+\pi j}, z_3 = e^{-2\pi(j+4)}, z_4 = e^{j\pi/2}e^j, \\ z_5 = 1 + je^{j2\pi}, z_6 = e^j/e^{-3j}, z_7 = 5e^{-j}/e^j.\end{aligned}$$

Per ciascun z_i , ($i = 1, \dots, 7$) calcolare $\operatorname{Re} z_i$, $\operatorname{Im} z_i$, $|z_i|$, $\operatorname{Arg} z_i$.