ANALISI MATEMATICA III (ELM+TEM) A.A. 2010-2011

21 e 23 marzo 2011

March 23, 2011

1 Altre proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. S*e f è pari, allora F è pari.*
2. S*e f è dispari; allora F è dispari.*
3. *Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.*
4. *Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.*

Valgono anche le relazioni inverse se $f \in L^2(\mathbb{R})$ oppure se f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$. Precisamente:

5. S*e F è pari, allora f è pari.*
6. S*e F è dispari; allora f è dispari.*
7. *Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.*
8. *Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.*

2 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in $\mathbf{L}^2$

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *Allora:*
1) L'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, *eccetto, al più, un insieme di misura nulla.*
Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,$$

si ha inoltre:
2) $F \in L^2(\mathbb{R})$
3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche **principio di conservazione della norma (o dell'energia).**
La proprietà 1) suggerisce la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; si chiama *Trasformata di Fourier in* L^2, la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{1}$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di

Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1, vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata in $L^1(\mathbb{R})$ non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1, vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

3 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ la sua trasformata. Allora $F \in L^2(\mathbb{R})$ e*

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f, a meno di un fattore 2π.

Conseguenze:

♦ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \ \mathrm{sink}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML \ \mathrm{sink}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M \text{ se } |\omega| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che tale trasformata non è continua in $\mathbb{R}$. Infatti $g \notin L^1(\mathbb{R})$!

♦ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$h(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$H(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$\varphi(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{\varphi(t)\} = \Phi(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Si osservi che tale trasformata non è derivabile in $\omega = 0$ (ed infatti $t\varphi(t) \notin L^1(\mathbb{R})$.

4 Il caso razionale

I seguenti risultati permettono di stabilire quando una funzione razionale f è trasformabile in L^2 secondo Fourier e, analogamente quando una funzione razionale F è una trasformata di Fourier in L^2.

Teorema 1 *Sia R una funzione razionale, ossia*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora :

1) $R \in L^2(\mathbb{R})$ *se e solo se R è propria e il polinomio D non ha zeri reali, ossia se e solo se*

$$\begin{aligned} &i)\ \mathrm{gr}\ D - \mathrm{gr} N > 0 \\ &ii)\ D(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

2) $R \in L^1(\mathbb{R})$ *se e solo se*

$$\begin{aligned} &i)\ \mathrm{gr}\ D - \mathrm{gr} N > 1 \\ &ii)\ D(x) \neq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Nella prossima lezione vedremo anche il seguente risultato:

Teorema 2 *Sia F una funzione razionale, e $F \in L^2(\mathbb{R})$ (ossia sono verificate per F* le condizioni (2)) . *Allora l'antitrasformata di F appartiene sia a $L^1(R)$ che a $L^2(R)$, ossia, indicata con f tale antitrasformata, si ha $f \in L^1(R) \cap L^2(R)$.*

Utilizzando poi la teoria delle distribuzioni, vedremo alla conclusione del corso che il Teorema 2 puo' essere generalizzato nel modo seguente:

Teorema 3 *Sia F una funzione razionale, ossia*

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

con P, Q polinomi primi tra loro e $Q(\omega) \neq 0\ \forall \omega \in \mathbb{R}$. Allora:

- se gr $P <$ gr Q , allora F è trasformata di Fourier di una $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

- se gr $P \geq$ gr Q, allora F è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

ESEMPIO 1

Si considerino le funzioni

$$f_1(t) = \frac{5+t}{t-9};\quad f_2(t) = \frac{5+t}{t^2+9};$$
$$f_3(t) = \frac{5+t}{t^2-9};\quad f_4(t) = \frac{5+t}{(t^2+9)^2}.$$

Allora f_1 e f_3 non sono trasfomabili secondo Fourier (né in L^1 né in L^2), in quanto non appartengono né a L^1 né a L^2. Invece $f_2 \in L^2$ e f_4 appartiene sia in L^2 che in L^1.Pertanto f_2 ammette trasformata di Fourier in L^2 e f_4 ammette trasf. di Fourier sia in L^1 che in L^2 e, ovviamente, le due trasformate coincidono

ESEMPIO 2

Si considerino le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{5\omega}{\omega-8};\quad F_2(\omega) = \frac{5\omega}{\omega^2+3\omega};$$
$$F_3(t) = \frac{5\omega}{\omega^2+3};\quad F_4(\omega) = \frac{5\omega^2+4}{\omega^2+8}.$$

Allora F_1 e F_2 non appartengono a L^2 e quindi non sono trasformate di Fourier. Invece $F_3 \in L^2$ e quindi (vedi Teorema 2) la sua antitrasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Infine F_4 è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni (vedi Teorema 3).

5 Il teorema di Shannon

Si veda Cap. 3.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

6 APPENDICE

In questa parte vengono brevemente presentati alcuni richiami sulle funzioni complesse e la teoria dei Residui, visti nel corso di Applicazioni di Matematica. Per maggiori dettagli si rimanda a tale corso e alle tracce delle lezioni di Applicazioni di Matematica in questo stesso sito. Si raccomanda di prendere familiarita' con i concetti qui presentati, anche svolgendo gli esercizi finali.

6.1 Funzioni complesse : generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = s^2 + 1$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 7js + s^2 \\ f_2(s) &= s + |s|^2 \\ f_3(s) &= (5j - 1)s \\ f_4(s) &= |s| - 5j \end{aligned}$$

7 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0, raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t + x_0 \\ y(t) &= \rho \sin t + y_0 \end{aligned}$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0), raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

8 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

9 Teorema di Cauchy

Sia H la funzione

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}, \tag{4}$$

dove N e D sono polinomi primi tra loro e α è un numero complesso fissato. Utilizzando il Teorema di Cauchy, visto nel corso di Applicazioni di Matematica e al quale si rimanda, si ottiene il seguente:

Teorema *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e percorsa in senso positivo (antiorario). Sia la funzione H, definita in (4), continua sulla curva Γ (ossia $D(s) \neq 0$ se $s \in \Gamma$). Siano poi $s_1, s_2, ..s_N$ gli zeri del polinomio D **interni** alla curva Γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma H(s) ds = Res[H, s_1] + Res[H, s_2] + ... + Res[H, s_N]$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i.

Il $Res[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica al quale si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso particolare considerato.

- **Se s_0 è una radice semplice di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}.$$

- **Se s_0 è una radice doppia di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^2 \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

- **In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

Esercizio - Per le funzioni

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+5s+4}; \qquad f_3(s) = \frac{se^{5s}}{s^2-1}$$

$$f_4(s) = \frac{3se^{-2s}}{s^3+6s^2+5s}; \qquad f_5(s) = \frac{s}{(s+j)^2}; \qquad f_6(s) = \frac{e^s}{(s+1)^2}.$$

calcolare

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa in senso positivo (antiorario).