ANALISI MATEMATICA III (ELM+TEM) A.A. 2010-2011
28 e 30 marzo 2011

March 26, 2011

1 Calcolo della trasf. (antitrasf.) nel caso razionale

Il calcolo della trasformata (antitrasformata) di Fourier nel caso razionale puo' essere effettuato utilizzando la Teoria dei Residui (vista la scorsa settimana) e il seguente:

Lemma di Jordan - *Sia g una funzione complessa razionale propria, ossia*

$$g(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N e D sono polinomi con grado (N) $<$ grado (D). Allora:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} g(s) e^{jms} ds = 0$$

se:

i) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R, contenuta nel semipiano $\mathrm{Im}\, s > 0$ *e m è un numero reale positivo (vedi figura 1);*

oppure se:

ii) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R, contenuta nel semipiano $\mathrm{Im}\, s < 0$ *e m è un numero reale negativo (vedi figura 2).*

Tale Lemma, insieme alla teoria dei Residui, consente di calcolare agevolmente integrali del tipo

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(u)}{D(u)} e^{ju\omega} du$$

dove N e D sono polinomi con grado $D >$ grado N e $D(u) \neq 0$ per **ogni** u reale. Il procedimento è stato sviluppato dettagliatamente a lezione ed altri esercizi saranno visti nelle prossime lezioni. Qui ricordiamo soltanto i due risultati finali, il primo per la trasformata e il secondo per l'antitrasformata.

Teorema (trasformata) - *Sia f razionale, $f(t) = N(t)/D(t)$. Siano i polinomi N, D primi tra loro e siano verificate le condizioni*

$$\begin{gathered} D(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{gr } D - \text{ gr } N > 0 \end{gathered}$$

Allora, indicati con $s_1, ...s_N$ gli zeri di D, si ha:

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res } [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res } [f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema (antitrasformata) - *Sia F razionale, $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. Siano i polinomi P, Q primi tra loro e siano verificate le condizioni*

$$\begin{gathered} i) \text{ gr } P < \text{gr } Q \\ ii) \ Q(\omega) \neq 0 \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Allora, indicati con $s_1, ...s_N$ gli zeri di Q, l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res } [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ \\ j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res } [F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i.

Esercizio:
Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4}.$$

Poiché F è pari, anche la sua antitrasformata f è pari. Utilizzando il metodo visto in precedenza si ha per $t > 0$

$$f(t) = j \text{ Res}[F(s)e^{jst}, 2j]$$

da cui, con facile calcolo,

$$f(t) = \frac{1}{2} j e^{-2t} \text{ se } t > 0$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2} j e^{2t} \text{ se } t < 0.$$

2 Altre proprietà della trasformata di Fourier

1. **Linearità** - *Siano* $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. *Allora:*

$$\mathfrak{F}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 \mathfrak{F}\{f_1\} + c_2 \mathfrak{F}\{f_2\}, \qquad c_i \in \mathbb{C}.$$

2. **Traslazione in frequenza -** *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.*Allora:*

$$\mathfrak{F}\left\{f(t)e^{j\gamma t}\right\} = F(\omega - \gamma), \qquad \gamma \in \mathbb{R}.$$

3. **Traslazione temporale** - *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. *Allora:*

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \qquad A \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO
Calcolare le trasformate di Fourier di

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} e^{5jt}; \quad h_1(t) = \frac{1}{(t+8)^2 + 1};$$
$$h_2(t) = \frac{1}{(t+8)^2 + 1} e^{4jt}.$$

Posto

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1},$$

la sua trasformata di Fourier è (vedi lezioni scorse)

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}.$$

Poiché $g(t) = f(t)e^{j5t}$, applicando la traslazione in frequenza si ottiene

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = F(\omega - 5).$$

Poiché $h_1(t) = f(t+8)$, applicando la traslazione temporale si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_1(t)\} = F(\omega)e^{8j\omega}.$$

Infine, avendosi $h_2(t) = h_1(t)e^{j4t}$, applcando la traslazione in frequenza alla trasformata di h_1 si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_2(t)\} = F(\omega - 4)e^{8j(\omega-4)}.$$

3 Trasformata di Laplace

Come si è visto, sono trasformabili secondo Fourier le funzioni appartenenti agli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. Tali spazi tuttavia non sono sufficientemente "ampi" per poter applicare questo algoritmo alle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Ad esempio, come è noto, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

sono una combinazione lineare delle funzioni

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{5t}$$

e le due funzioni e^t, e^{5t} non appartegono né a $L^1(\mathbb{R})$, né a $L^2(\mathbb{R})$. Nasce quindi il problema di come sia possibile applicare l'algoritmo della trasformata a funzioni la cui crescita (per $t \to +\infty$) sia di tipo "esponenziale". La Trasformata di Laplace fornisce una risposta in tal senso. Alla fine del corso, vedremo un'altra possibilità di "estensione" della trasformata di Fourier, e quest'ultima estensione costituisce, come vedremo, un **effettivo** ampliamento degli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

3.1 Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$\begin{array}{c} 1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ \\ 2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \end{array} \tag{1}$$

E' evidente che se $f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > x_0$. Si chiama *ascissa di convergenza di* f, e si indica con α_f, il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\} .$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} ,$$

per le funzioni

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = e^{5t}u(t), & f_2(t) = tu(t), & f_3(t) = \sin t \; u(t), \\ f_4(t) = e^{-9t}u(t), & f_5(t) = u(t), & f_6(t) = u(t) - u(t-7) \end{array}$$

si ha

$$\begin{array}{l} \alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \\ \alpha_{f_4} = -9, \;\; \alpha_{f_5} = 0, \;\; \alpha_{f_6} = -\infty. \end{array}$$

Ciò premesso, si ha la seguente

Definizione. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza . Si chiama trasformata di Laplace di f, e si indica con $L[f]$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, dove $x > \alpha_f$, ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F} \left\{ f(t)e^{-xt} \right\} . \tag{2}$$

Utilizzando la definizione di trasformata di Fourier si ottiene facilmente

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s = x(> \alpha_f)$.

Per complementi sulla trasformata di Laplace, e per la sua definizione, si veda anche Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3.2 Formula di Bromwich-Mellin

Vale la seguente:

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia* $f \in \Lambda^1$. *Sia inoltre* f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$. *Indicata con* $F(s) = L[f(t)]$ *la sua trasformata di Laplace, si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st}ds \tag{3}$$

dove $x = \mathrm{Re}\, s > \alpha_f$

La formula (3), nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, puo' essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (2). L'ipotesi "*f sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$" serve per poter applicare la formula di inversione della trasformata di Fourier e puo' essere omessa se $f(t)e^{-xt} \in L^2[0, \infty)$ (vedi Teorema di Plancherel).

Utilizzando il Lemma di Jordan, in una forma leggermente più generale di quella sopra ricordata, è possibile mostrare che il secondo membro in (3) è indipendente dalla scelta di x, purché sia $x > \alpha_f$.

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente risultato, la cui seconda parte sarà provata in seguito:

Teorema 3 *Sia* F *razionale,* $F(s) = N(s)/D(s)$.

- *Se gr* $D >$ *gr* N *allora esiste* $f \in \Lambda^1$ *tale che* $F(s) = L[f(t)]$.
- *Se gr* $D \leq$ *gr* N. *allora* F *è la trasformata di Laplace di una distribuzione.*

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema 4 *Sia* F *razionale propria,* $F(s) = N(s)/D(s)$ *con* N, D *polinomi primi tra loro con gr* $N <$*gr* D. *Allora l'antitrasformata di Laplace di* $F(s)$ *è data, per* $t > 0$, *dalla funzione*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano TUTTI gli zeri del polinomio D, i.e. le singolarità di F.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

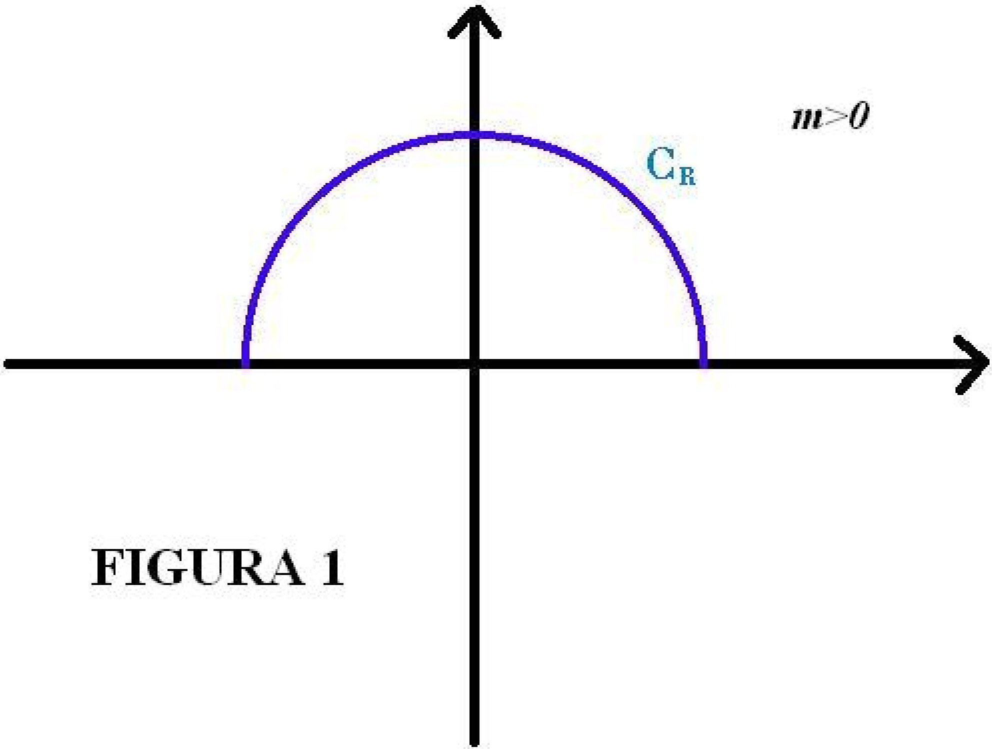

FIGURA 1

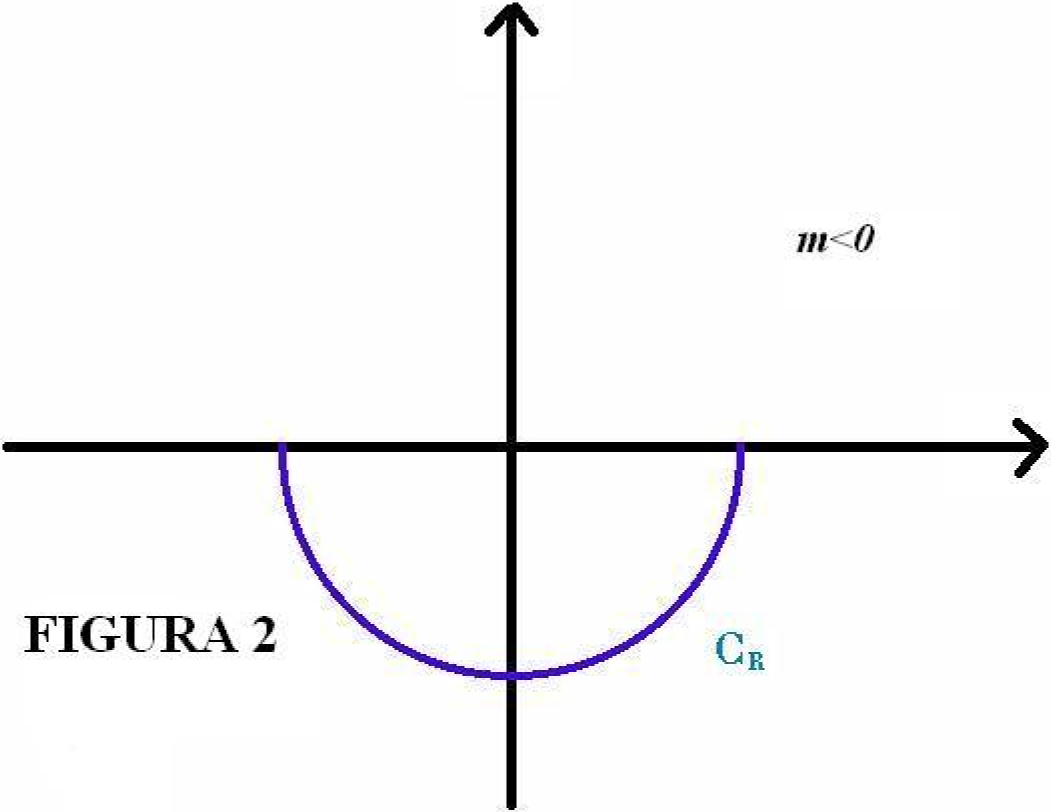

FIGURA 2