ANALISI MATEMATICA III (ELM+TEM) A.A. 2010-2011

11 aprile 2011

April 11, 2011

1 Proprietà della trasformata di Laplace

Ricordiamo le principali proprietà della trasformata di Laplace, che intervengono nella risolubilita' di equazioni differenziali e integro-differenziali a coefficienti costanti

- **Linearità**

  Siano $f_1, f_2 \in \Lambda^1$ e siano c_1, c_2 due costanti (reali o complesse). Allora:

  $$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2].$$

- **Derivazione**

  Sia $f \in C^1[0, \infty)$ e sia $f, f' \in \Lambda^1$. Allora

  $$L[f\,'] = sL[f] - f(0+),$$

  dove $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$.

  Sia $f \in C^2[0, \infty)$ e sia $f, f', f\,'' \in \Lambda^1$. Allora

  $$L[f\,''] = s^2 L[f] - s\ f(0+) - f\,'(0+),$$

  dove $f(0+) = \lim_{t\to 0+} f(t)$ e $f\,'(0+) = \lim_{t\to 0+} f\,'(t)$.

- **Integrazione**

  Sia $f \in \Lambda^1$ e sia $g(t) = \int_0^t f(r)dr \in \Lambda^1$. Allora
$$L[\int_0^t f(r)dr] = \frac{L[f]}{s}.$$

- **Convoluzione**

  Sia $f, g \in \Lambda^1$. Come visto nelle precedenti lezioni, poiché f e g sono nulle per $t < 0$, il prodotto di convoluzione $f * g$ assume la forma
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$
  e si ha
$$L[f * g] = L[f]\ L[g].$$
  In altre parole, sia $f, g \in \Lambda^1$; posto $L[f] = F(s)$, $L[g] = G(s)$ si ha
$$f * g = L^{-1}(F(s)\ G(s)),$$
  dove il simbolo L^{-1} indica l'antitrasformata di Laplace.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.9, 1.10, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

2 Equazioni differenziali lineari e trasformata di Laplace

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti
$$y'' + ay' + by = g(t) \tag{1}$$
dove $g \in \Lambda^1$. Vogliamo trovare la soluzione y di (1) che verifica le condizioni iniziali
$$y(0) = A, y'(0) = B.$$

Poichè, come è possibile provare, tutte le soluzioni di (1) sono (per $t \geq 0$) funzioni di classe Λ^1, è possibile utilizzare il metodo della trasformata di Laplace. Applicando la trasformata di Laplace all'equazione (1) ed usando la linearità si ottiene

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[g].$$

Usando poi il Teorema di derivazione si ha:

$$s^2 L[y] - As - B + a(sL[y] - A) + bL[y] = L[g]$$

ossia

$$L[y] = \underbrace{\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}}_{(\#)} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + as + b}}_{(*)} L[g]$$

Le funzioni (#) e (*) sono funzioni razionali proprie ed allora è possibile calcolare la loro antitrasformata utilizzando il Teorema visto nelle precedenti lezioni. Indicate con f e h tali antitrasformate, ossia

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}\right)$$
$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + as + b}\right),$$

applicando la proprietà di convoluzione si ottiene per $t \geq 0$

$$y(t) = f(t) + (h * g)(t).$$

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3 Equazioni differenziali lineari del 2 ordine: l'oscillazione

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \tag{2}$$

dove le funzioni a, b, g sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale del tipo $(\overline{x}, +\infty)$ oppure $[\overline{x}, \infty)$. Non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $\overline{x} = -\infty$.

Se g è la funzione idediticamente nulla, allora (2) diviene

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{3}$$

e prende nome di equazione omogenea. Se g non è la funzione identicamente nulla, allora (2) si dice nonomogenea o affine.

Valgono le seguenti proprietà::

1. *Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (2) tale che $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2$.*

2. *Ogni soluzione di (2) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo I.*

3. *Nel caso omogeneo, l'insieme delle soluzioni di (3) è uno spazio lineare di dimensione* 2 .

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (*2*) diviene un'equazione "a coefficienti costanti" la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata, come si è visto in precedenza, anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (*2*) o (3) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'equazione di Schrödinger monodimensionale

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{4}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, $h =$ costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (4) è di tipo (3) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel,** ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{5}$$

dove n è un parametro reale. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione).

Definizione - Sia y una soluzione di (3), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (3) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (3) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$).

Vale il seguente:

Teorema (di Sturm) - *Tutte le soluzioni nonbanali di (3) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (3) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (3) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Un criterio di oscillazione è il seguente:

Teorema di Leigthon

I) Sia $b(x) \geq 0$ per ogni x grande e sia A una primitiva di a, ossia

$$A'(x) = a(x).$$

(i) L'equazione (3) è oscillante se

$$\int^{\infty} e^{-A(x)} dx = \int^{\infty} e^{A(x)} b(x) dx = \infty.$$

(ii) L'equazione (3) è nonoscillante se

$$\int^{\infty} e^{-A(x)}dx < +\infty, \qquad \int^{\infty} e^{A(x)}b(x)dx. < +\infty$$

II) Sia $b(x) \leq 0$ per ogni x grande. Allora l'equazione (3) è nonoscillante.

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente che l'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \tag{6}$$

(6) è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2+1}{4x^2+4}y = 0$$

e l'equazione di Bessel sopra introdotta

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty)$$

Invece è nonoscillante l'equazione

$$y'' + \frac{1-2x^2}{4x^2+4}y = 0.$$