

ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2010-2011
Traccia della lezione del 4 maggio 2011

May 4, 2011

1 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt.$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi'(t) dt = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \implies \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT , la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} - \langle T, \varphi'(t) \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.

- Se $f \in C^1(\mathbb{R}) \implies f' \equiv Df$
- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

- $D[u(t) - u(t - a)] = \delta(t) - \delta(t - a).$
- **Teorema** - Se $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ e $f' \in L^1_{loc}$, allora

$$f(t_0+) = \lim_{t \rightarrow t_0+} f(t), \quad f(t_0-) = \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

si ha

$$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\begin{aligned} \langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle &=_{\text{def}} -\varphi'(0), \quad \forall \varphi \in D \\ \langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle &=_{\text{def}} \varphi''(0), \quad \forall \varphi \in D \\ &\dots\dots\dots \\ \langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \rangle &=_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall \varphi \in D. \end{aligned}$$

In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t - a).$

2 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc} , ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f \cdot g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T \cdot g$ la distribuzione definita da

$$\langle T \cdot g, \varphi \rangle = \langle T, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2 + 4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t \delta(t - \frac{\pi}{2}) &= \delta(t - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3 + 5t)\delta'(t - 1)] &= -5\delta'(t - 1) + 8\delta''(t - 1) \\ (t - 1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t - 2) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$.