ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM A.A. 2010-2011
Traccia della lezione del 23 maggio 2011

May 23, 2011

1 La distribuzione v.p. (1/t)

Consideriamo il funzionale T definito da

$$T : \varphi \in D \to \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt. \tag{1}$$

L'integrale in (1) è ben definito in quanto la funzione integranda è nulla per ogni t sufficientemente grande ($\varphi \in D$) ed inoltre

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = 2\varphi'(0).$$

Si può provare che tale funzionale è lineare e continuo in D e quindi è una distribuzione. Tale distribuzione si indica con $v.p.1/t$, ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

Il motivo del nome dato a questa distribuzione è giustificato dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi(t) dt \right),$$

ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t}\varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t}\varphi(t) dt \right)$$

dove ε è una costante positiva.

Proprietà:

- la derivata nel senso delle distribuzioni di $\log|t|$ è $v.p.\frac{1}{t}$,i.e.

$$D(\log|t|) = v.p.\frac{1}{t}.$$

- Si ha $t \cdot v.p.\frac{1}{t} = 1$.

  Infatti, usando il crochet e ricordando la definizione di prodotto di distribuzioni, si ottiene $\forall\varphi \in D$

$$\left\langle t \cdot \ v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t)\right\rangle = \left\langle v.p.\frac{1}{t}, t\varphi(t)\right\rangle =$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t) + t\varphi(-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} (\varphi(t) + \varphi(-t))dt =$$
$$= . \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt + \int_0^{+\infty} \varphi(-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt = \langle 1, \varphi(t)\rangle$$

- Trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = -j \ v.p.\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$
$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = -2j \ v.p.\frac{1}{\omega},$$

  dove $u(t)$ rappresenta la funzione scalino e $sgn(t)$ la funzione "segno", i.e.

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0 \\ -1 & \text{se} \quad t < 0. \end{cases} .$$