APPLICAZIONI di MATEMATICA A.A. 2011-2012

Tracce delle lezioni del 20 e 22 settembre 2011

September 26, 2011

1 Richiami sui numeri complessi

1.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j, detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \mathrm{Re}z, b = \mathrm{Im}z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale*. Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ sono chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario.*

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a + jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* z, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A, il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\overline{z \pm s} &= \overline{z} \pm \overline{s} \\
\overline{zs} &= \overline{z}\ \overline{s} \\
\overline{\left(\frac{z}{s}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{s}} \qquad \text{se } s \neq 0.
\end{aligned}$$

Si chiama poi *modulo di* z, e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z$:

$$\begin{aligned}
z\ \bar{z} &= |z|^2 \\
\mathrm{Re}\ z &= (z + \bar{z})/2 \\
\mathrm{Im}\ z &= (z - \bar{z})/2j.
\end{aligned}$$

1.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned}
z + s &= (a + c) + (b + d)j \\
z - s &= (a - c) + (b - d)j \\
zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\
\frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \ (\text{se } s \neq 0).
\end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi e sarà provata successivamente.

1.3 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di* z, e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a + jb$, indicando con ρ il modulo di z, risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta).$$

Le formule di passaggio sono:

$$\begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del loro prodotto e del loro rapporto. Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica, $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$, $s_2 \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{s_1}{s_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$\left(\sqrt{3} + j\right)^6 = -64.$$

Se interpretiamo i numeri complessi come vettori piani, allora la somma o la differenza tra due numeri complessi s, z. ha, rispettivamente, il significato tradizionale di somma o differenza tra vettori. Il prodotto di un numero complesso z per un numero complesso assegnato s_0, con $z \neq 0$ e $s_0 \neq 0$, puo' essere interpretato come una rotazione del vettore z accompagnata da una omotetia (dilatazione se $|s_0| > 1$, contrazione se $|s_0| < 1$). Ad esempio jz è il vettore che si ottiene ruotando in senso antiorario di $\pi/2$ il vettore z.

2 Funzioni complesse - Generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

La funzione f prende nome di *"inversione per raggi reciproci"* e gode della seguente proprieta': f trasforma circonferenze di centro l'origine in circonferenze di centro l'origine e ne inverte il senso di percorrenza. Inoltre f trasforma l'interno di tali circonferenze nell'esterno e viceversa.

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 7js + s^2 \\ f_2(s) &= s + |s|^2 \\ f_3(s) &= \frac{\overline{s}}{s - 4} \\ f_4(s) &= \frac{3}{s - |s|}. \end{aligned}$$

3 Radici in campo complesso e risoluzione di equazioni algebriche.

Determinare le radici n-esime di un dato numero complesso $s_0 \neq 0$ significa risolvere l'equazione $z^n = s_0$. Utilizzando la forma trigonometrica $s_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0)$, $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$ (ρ_0, θ_0 dati del problema, ρ, θ incognite), mediante l'utilizzo delle formule di De Moivre si ottiene

$$\rho^n = \rho_0, \quad n\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti due numeri complessi coincidono se e solo se hanno uguale modulo e argomento che differisce per multipli di 2π. Essendo ρ_0 reale positivo, la prima equazione ha come unica soluzione $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ (radice reale). Dalla seconda: $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$; si osserva che soltanto per $k = 0, 1, \ldots n-1$ risulta $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto le radici n-esime di s_0 sono date da:

$$\sqrt[n]{s_0} = \sqrt[n]{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

dove $\rho_0 = |s_0|$, $\theta_0 = \mathrm{Arg(s_0)}$.

Pertanto:

- **Le radici distinte sono esattamente** n.
- **Tali radici hanno tutte lo stesso modulo** e quindi si trovano su una medesima circonferenza, di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$.
- Tali radici **sono i vertici di un poligono regolare di** n **lati, inscritto in tale circonferenza.** Quindi tali radici differiscono tra loro per una rotazione di un multiplo di $2\pi/n$.

La radice n-esima in $\mathbb{C}$ quindi *non* è una funzione, ma una applicazione a più valori. Ad esempio la radice quadrata in $\mathbb{C}$ restituisce due valori (opposti) ($\sqrt{-4} = \pm 2j$).

4 Successioni e serie

Per le successioni, la nozione di convergenza è "formalmente" analoga a quella vista in $\mathbb{R}$. Precisamente diremo che

$$\lim_n s_n = s_0 \tag{1}$$

o, equivalentemente,

$$s_n \longrightarrow s_0$$

con $s_n, s_0 \in \mathbb{C}$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|s_n - s_0| < \epsilon \ \forall \ n \geq n_0$. E' facile mostrare che (1) è equivalente all'esistenza dei due limiti

$$\lim_n \operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} s_0, \qquad \lim_n \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} s_0.$$

Poiche $\mathbb{C}$ è completo, ogni successione convergente in $\mathbb{C}$ è di Cauchy, ossia verifica

$$\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ n_0 \ : |s_n - s_m| < \epsilon \qquad \forall n, m \geq n_0$$

e viceversa.

Analogamente al caso reale, diremo poi che la serie di numeri complessi

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i$$

converge, se converge la successione $\{S_N\}$ delle somme parziali, dove

$$S_N = \sum_{i=0}^{N} s_i.$$

In particolare vale il seguente risultato "*Se la serie numerica* $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|$ *è convergente (in* $\mathbb{R}$*), allora la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ *è convergente in* $\mathbb{C}$*".*

5 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \ldots.. + \frac{s^i}{i!} + \ldots..$$

Tale definizione è **l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso** s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:

2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:

3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j \sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

4. indicando rispettivamente con ρ e θ il modulo e l'argomento di un numero complesso $s \neq 0$ si ha che tale numero può essere rappresentato (oltreché in forma algebrica e trigonometrica) mediante la *forma esponenziale:* $s = \rho e^{j\theta}$

5. $|e^s| = e^{\mathrm{Re} s}$, $\mathrm{Arg}(e^s) = \mathrm{Im}(s)$, $\mathrm{Re}\, e^s = e^{\mathrm{Re}\, s} \cos \mathrm{Im}\, s$, $\mathrm{Im}\, e^s = e^{\mathrm{Re}\, s} \sin \mathrm{Im}\, s$

6. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

7. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.