APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2011-2012

Tracce delle lezioni del 27 e 29 settembre 2011

September 29, 2011

1 Distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, dove la distanza $d(z,s)$ tra due numeri $z,s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z,s) = |z - s|.$$

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ.

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1$$

rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

Esercizio. Verificare la relazione

$$|z + s|^2 + |z - s|^2 = 2(|z|^2 + |s|^2).$$

Tale relazione è nota come "Identità del parallelogrammo" in quanto esprime la ben nota proprietà della geometria euclidea che in un parallelogrammo la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali coincide con la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

2 Il concetto di infinito in $\mathbb{C}$

Nel seguito consideremo l'insieme $\mathbb{C}$ ampliato con l'aggiunta di $\{\infty\}$ (*punto all'infinito)* e chiameremo *intorno di* ∞ di raggio R, l'esterno della circonferenza di centro l'origine e raggio R. Tale definizione è giustificata dal fatto che l'insieme dei numeri complessi, ampliato con $\{\infty\}$, puo' essere messo in corrispondenza biunivoca con i punti della superficie di una sfera mediante la nota "proiezione stereografica". Il punto $\{\infty\}$ corrisponde, sulla superficie sferica, al polo e l'intorno di ∞ ad una calotta polare.

Diremo poi che una successione $\{s_n\}$ converge a ∞ se

$$\lim_n |s_n| = +\infty.$$

Anche tale definizione può essere giustificata rappresentando $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sulla superficie di una sfera mediante la proiezione stereografica.

2.1 Limiti e continuità

Poiché $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, la definizione di limite in $\mathbb{C}$ è simile a quella data in $\mathbb{R}$: è sufficiente interpretare il $|....|$ come modulo. Precisamente, data una funzione complessa $z = f(s)$ diremo che

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|s - s_0| < \delta$ e $s \neq s_0$ si ha $|f(s) - L| < \varepsilon$.

E' facile provare che

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se e solo se

$$\lim_{s \to s_0} \operatorname{Re} f(s) = \operatorname{Re} L \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to s_0} \operatorname{Im} f(s) = \operatorname{Im} L.$$

La funzione complessa $z = f(s)$ si dice *continua in* s_0 se

$$\lim_{s \longrightarrow s_0} f(s) = f(s_0).$$

Una funzione f è continua in s_0 se e solo se sono continue in (x_0, y_0) [dove $s_0 = x_0 + jy_0$] la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$. Somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni continue sono funzioni continue (nel caso del quoziente sono **esclusi** i punti in cui il denominatore si annulla).

Poichè $\mathbb{C}$ è non ordinato, non è possibile estendere al piano complesso il concetto di funzione monotona e le relative proprietà viste nell'ambito dell'analisi reale.

3 Derivabilità e analiticità

3.1 Definizioni

DEF. n. 1 Una funzione f, definita in un intorno di un punto s_0, si dice *derivabile in* s_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{s \to s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}$$

e tale limite si indica con il simbolo $f\,'(s_0)$.

Esempi: per le funzioni

$$f(s) = 1, g(s) = s, h(s) = s^2$$

si ha rispettivamente

$$f\,'(s) = 0, g'(s) = 1, h'(s) = 2s.$$

In generale, è possibile provare che, se $n \in \mathbb{N}$, allora

$$f(s) = s^n \Longrightarrow f\,'(s) = ns^{n-1}.$$

Le funzioni $f(s) = \overline{s}, g(s) = |s|$ non sono derivabili in $s_0 = 0$.

DEF. n. 2 Sia Ω un insieme aperto del piano complesso. Una funzione f si dice *analitica in* Ω [e si scrive $f \in C^1(\Omega)$] se f è derivabile in tutto l'insieme Ω ed ha derivata continua.

3.2 Teorema di Cauchy-Riemann

Vale il seguente importante risultato:

Teorema di Cauchy-Riemann. *Sia Ω un insieme* ***aperto*** *del piano complesso. Una funzione f è analitica in Ω* ***se e solo se*** *le funzioni $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ sono derivabili parzialmente rispetto a x e y [dove, al solito, $s = x + jy$] con derivate continue e verificano in tutto Ω le relazioni*

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y). \end{aligned} \tag{1}$$

Inoltre si ha

$$f\,'(s) = u_x(x,y) + jv_x(x,y). \tag{2}$$

Le formule (1) prendono nome di *formule di Cauchy-Riemann.*

La formula (2) fornisce l'espressione della derivata di una funzione analitica. Da essa, tenendo conto di (1), è possibile ottenere altre equivalenti espressioni per la derivata. Ad esempio si ha

$$f\,'(s) = v_y(x,y) - ju_y(x,y).$$

Esercizi. *i)* provare che le funzioni $f(s) = \overline{s}$, $g(s) = |s|$ non sono analitica in $\mathbb{C}$;

ii) provare che $g(s) = s^2 + js$ è analitica in $\mathbb{C}$ e $g'(s) = 2s + j$;

iii) provare che $h(s) = e^s$ è analitica in $\mathbb{C}$ e $h'(s) = e^s$.

3.3 Proprietà

Valgono le usuali regole di derivazione, viste nell'ambito dell'analisi reale:

$$\begin{aligned} (f(s) \pm g(s))' &= f\,'(s) \pm g'(s) \\ (f(s)\ g(s))' &= f\,'(s)g(s) + f(s)g'(s) \\ \left(\frac{f(s)}{g(s)}\right)' &= \frac{f\,'(s)g(s) - f(s)g'(s)}{g^2(s)} \\ \frac{d}{ds} f(g(s) &= \frac{df}{dg}\ \frac{dg}{ds}. \end{aligned}$$

4 Analiticita' e funzioni armoniche

Anticipiamo il seguente risultato, che sarà visto in seguito.

Teorema *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$. Allora f è analitica in Ω [ossia $f \in C^1(\Omega)$] se e solo se $f \in C^\infty(\Omega)$.*

Chiaramente, un equivalente Teorema non vale nell'ambito delle funzioni reali di variabile reale.

Definizione *Una funzione $h : R^2 \to R, h = h(x,y)$ si dice armonica in un aperto Ω se in tale aperto h soddisfa l'equazione*

$$h_{xx}(x,y) + h_{yy}(x,y) = 0. \tag{3}$$

Teorema *Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0. Allora le funzioni*

$$u = \operatorname{Re} f, \qquad v = \operatorname{Im} f$$

sono funzioni armoniche in tale intorno, ossia in tale intorno verificano l'equazione

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \\ v_{xx} + v_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Viceversa sia $u = u(x,y)$ [$v = v(x,y)$] una funzione armonica in un intorno I di (x_0, y_0). Allora esiste una funzione analitica f, individuata a meno di una costante reale, tale che $\operatorname{Re} f = u$ [$\operatorname{Im} f = v$].

Corollario *Una funzione $u = u(x,y)$, definita in un intorno I di un punto (x_0, y_0) è parte reale di una funzione analitica in I se e solo se u è armonica in tale intorno, ossia soddisfa l'equazione (3) in I. Analogamente una funzione $v = v(x,y)$, definita in I è parte immaginaria di una funzione analitica in I se e solo se v è armonica in I, ossia soddisfa l'equazione (3) in I.*

Esempi. La funzione $u(x,y) = 2xy + y$ è parte reale di una funzione analitica. La funzione $v(x,y) = x^2 + 4xy$ non è parte immaginaria di una funzione analitica. Analogamente, la funzione $u(x,y) = 2x - 7y^2$ non è parte reale di una funzione analitica.

5 Ricostruzione di una funzione analitica f, assegnata la parte reale $u = \mathrm{Re}\, f$ oppure la parte immaginaria $v = \mathrm{Im}\ f$.

Utilizzando i risultati precedenti e le formule di Cauchy-Riemann, è possibile determinare tutte le funzioni analitiche aventi una parte reale (o immaginaria) assegnata e armonica.

Procediamo con un esempio. La funzione $u(x, y) = 6xy - x - 2$, come è immediato verificare, è armonica. Troviamo dunque le funzioni f tali che $\mathrm{Re}\, f = u$.

Si ha

$$u_x(x, y) = 6y - 1, \qquad u_y(x, y) = 6x$$

Tenendo conto delle formule di Cauchy-Rieman si ottiene

$$\begin{aligned} v_y(x, y) &= 6y - 1 \\ v_x(x, y) &= -6x \end{aligned}$$

Integrando la prima equazione rispetto a y e la seconda rispetto a x si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} v(x, y) &= 3y^2 - y + c(x) \\ v(x, y) &= -3x^2 + d(y) \end{aligned}$$

dove $c = c(x)$ è una funzione della **sola** x e $d = d(y)$ è una funzione della **sola** y. Allora

$$3y^2 - y + c(x) = -3x^2 + d(y)$$

ossia

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x)$$

Poichè il primo membro dipende solo da y e il secondo soltanto da x, necessariamente entrambi devono essere costanti, ossia esiste una costante reale k tale che

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x) = k.$$

Ne segue $c(x) = -3x^2 + k$ e quindi $v(x, y) = 3y^2 - y + -3x^2 + k$. In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned} f(s) = f(x + jy) &= u(x, y) + jv(x, y) = \\ &= [6xy - x - 2] + j[3y^2 - y + -3x^2 + k] \end{aligned} \tag{4}$$

Per determinare l'espressione di f in funzione della variabile s si puo' usare il seguente:

Teorema di Weierstrass (dell'unicità dell'estensione analitica) *Sia* $\widehat{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Allora esiste al più una estensione di* $\widehat{h}$ *al piano complesso che risulti analitica, i.e. esiste al piu' una funzione* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica e tale che $h(x) = \widehat{h}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Il teorema di Weierstrass è un risultato di "unicità" e sinteticamente è chiamato "Teorema dell'unicità dell'estensione analitica".

Il (semplice) procedimento è il seguente. Da (4) si ha

$$\widehat{h}(x) = f(x + j0) = -x - 2 - 3x^2 j + kj. \tag{5}$$

Si consideri poi l'estensione a $\mathbb{C}$ della funzione $\widehat{h}$, ossia si consideri la funzione h ottenuta da (5) sostituendo x con s :

$$h(s) = -s - 2 - 3s^2 j + kj. \tag{6}$$

Le funzioni (4) e (6) sono due estensioni **analitiche** della stessa funzione $\widehat{h}$. Allora, per il Teorema di unicità di Weierstrass, tali funzioni devono necessariamente coincidere, e quindi

$$f(s) = -s - 2 - 3s^2 j + kj.$$

6 Esercizi

- I teoremi di Rolle e di Lagrange non sono estendibili al piano complesso. Si giustifichi tale affermazione con un esempio (suggerimento: utilizzare la funzione $F(s) = e^s$).
- Sia f una funzione analitica in $\mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Im} f = 0$. Provare che f è una funzione costante.
- Determinare le funzioni analitiche tali che $u(x, y) = 3(x^2 - y^2)$ [Risposta $f(s) = 3s^2 + jk$].
- Determinare la funzione analitica f tale che $\operatorname{Re} f = x + 10xy$, $f(0) = 0$.

7 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua in $[a, b]$ e le due derivate x' , y' non si annullano contemporaneamente in $[a, b]$.

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto $[a, b]$ eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate x' e y' si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempi. (i) La curva

$$\gamma(t) = \cos t + j \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro l'origine, raggio 1 e percorsa in senso antiorario (il senso delle "t crescenti"). Ricordando le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}, \tag{7}$$

tale curva si puo' esprimere anche nella forma

$$\gamma(t) = e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

(ii) La curva

$$\gamma(t) = 6 + 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro 6, raggio 3 e percorsa in senso antiorario.

(iii) La curva

$$\gamma(t) = 1 + j + 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro $1 + j$, raggio 2 e percorsa in senso antiorario.

(iv) La curva

$$\gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi]$$

rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine, raggio 2, giacente nel 1^o e 2^o quadrante e percorsa in senso antiorario.

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* γ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

8 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di* f *esteso a* γ il numero complesso

$$\int_\gamma f(s) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) y'(t) dt.$$

Esempi: Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} |s| ds \text{ dove } \gamma_1(t) = 4e^{jt}, t \in [0, \pi];$$
$$I_2 = \int_{\gamma_2} |s| ds \text{ dove } \gamma_2(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi];$$
$$I_3 = \int_{\gamma_3} \overline{s} ds \text{ dove } \gamma_3(t) = e^{jt}, t \in [0, \pi/2];$$
$$I_4 = \int_{\gamma_4} s ds \text{ dove } \gamma_4(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi/2].$$

Si ha $I_1 = -32, I_2 = 0, I_3 = \pi j/2, I_4 = -4$.

"**Esercizio**" Si ha

$$\int_C \frac{1}{s-s_0} ds = 2\pi j,$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, i.e. C è una circonferenza di centro s_0, raggio r e percorsa (**una sola volta**) in senso antiorario (positivo).

9 Proprietà dell'integrale in C

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):

$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] ds = c_1 \int_\gamma f_1(s) ds + c_2 \int_\gamma f_2(s) ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_\gamma f(s) ds = -\int_{-\gamma} f(s) ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma 1 + \gamma 2} f(s) ds = \int_{\gamma 1} f(s) ds + \int_{\gamma 2} f(s) ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left| \int_\gamma f(s) ds \right| \leq L_\gamma \max_{s \in \gamma} |f(s)|$$

dove L_γ indica la lunghezza della curva γ.

10 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ. Allora:*

$$\int_\gamma f(s) ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che, in una regione in cui f è analitica, **l'integrale è indipendente dal cammino.**

Si osservi che se la funzione integranda non è analitica in TUTTA la regione limitata dalla curva γ, allora l'integrale puo' non essere nullo, come illustra l'esempio (visto in precedenza)

$$\int_C \frac{1}{s-s_0}ds = 2\pi j. \tag{8}$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

Teorema 2 (di Cauchy) *Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso con γ_1 contenente γ_2 [vedi figura 1]. Sia s_0 un punto interno a γ_2 e sia f analitica all'interno di γ_1 eccetto il punto s_0. Sia poi f continua su γ_1 e γ_2. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(s)ds = \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

Tale risultato esprime il fatto che l'integrale lungo una curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa non cambia se si "deforma con continuità la curva" purchè la funzione considerata sia analitica in tutta la regione compresa tra la curva originaria e la curva "deformata".

Ricordando l'integrale (8), si ha allora

$$\int_\gamma \frac{1}{s-s_0}ds = 2\pi j$$

dove γ è una **qualunque** curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa **contenente al proprio interno** il punto s_0.

Teorema 3 (di Cauchy) *Siano Γ, γ_1 e γ_2 tre curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso poste come in figura 2. Siano s_1 e s_2 due punti interni rispettivamente a γ_1 e γ_2 e sia f analitica all'interno di Γ eccetto i punti s_1 e s_2. Sia poi f continua su Γ, γ_1 e γ_2. Allora*

$$\int_\Gamma f(s)ds = \int_{\gamma_1} f(s)ds + \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

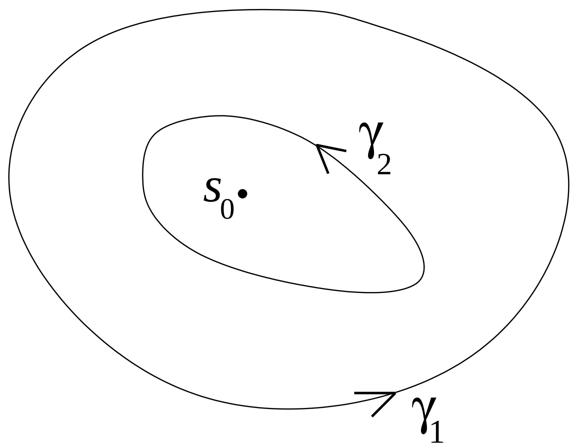

Figura 1

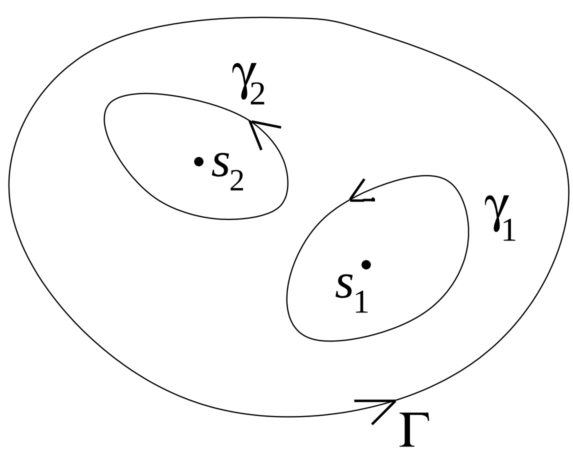

Figura 2