APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2011-2012
ESERCIZI parte 1

September 29, 2011

1 Numeri Complessi

ESERCIZIO 1.1 - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$3j; -2;\ 1+j;\ \ -1-j;\ 1+j\sqrt{3};\ 3-j\sqrt{3};\ \ -j\sqrt{5};$$
$$(1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j);\ \ -2+5j.$$

Per ciascuno di tali numeri, si scriva il suo complesso coniugato in forma esponenziale.

ESERCIZIO 1.2 - Calcolare tutti i valori delle seguenti radici nel campo complesso:

$$\sqrt[3]{1};\ \sqrt[3]{j};\ \sqrt[4]{-1};\ \sqrt[6]{-8};\ \sqrt[2]{1-j};\ \sqrt[2]{5+5j};\ \sqrt[2]{5-5j};\ \sqrt[3]{-2+5j};$$
$$\sqrt[4]{3-j};\ \sqrt[2]{2+3j};\ \sqrt[5]{2+j};\ \sqrt[3]{2-2j};\ \sqrt[4]{3+3j};\ \sqrt[4]{-1-j\sqrt[2]{3}}.$$

ESERCIZIO 1.3 - Calcolare:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8;\ \frac{(3+3j)^9}{j^6};\ \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

ESERCIZIO 1.4 - Risolvere le seguenti equazioni in campo complesso:

$$s^2 + js + 1 = 0;\ \ s^2 + s + 3 = 0;\ \ s^2 + 2s + j = 0;\ \ s^3 + s = 0;$$
$$s^4 + 1 = 0;\ \ s^3 + 27 = 0;\ \ s^4 + 16s^2 + 24 = 0;\ \ s^4 + j = 0.$$

ESERCIZIO 1.5 - Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni complesse:

$\sin s = 0;$	$\sin s = 1;$	$\cos s = 0;$	$\cos s = 1;$
$\exp(s) = 0;$	$\exp(s) = 1;$	$\exp(s) = j;$	$\exp(1/s) = 1;$
$\sin(s + j) = 0;$	$\sin(s - j) = 1;$	$\cos(s + 2j) = 0;$	$\cos(s - \pi j) = 1;$
$\exp(-s) = 1;$	$\exp(-s) = 0;$	$\exp(1/s) = 2j;$	$\exp(1/2s) = 1;$

ESERCIZIO 1.6 - Determinare le regioni piane individuate dalle seguenti diseguaglianze:

$\pi/8 \leq \arg s \leq \pi/3;$	$\|s + 2 - 4j\| \geq 1;$	$\|s - 2\| \leq 2;$	$\|s + 1\| = \|s - 1\|;$
$\mathrm{Im}\, s \leq 1;$	$\mathrm{Im}\, s = 2;$	$\|s - 1 + 5j\| < 1;$	$\mathrm{Re}\, s + \mathrm{Im}\, s < 0.$

ESERCIZIO 1.7 - Calcolare:

$$\log(-3);\ \ \log(j);\ \ \log(1 - j);\ \ \log(-1);$$
$$\exp(2\pi/j);\ \ \exp(4 + 4j);\ \ \exp(-1 + 2j).$$

2 Funzioni complesse - generalità

ESERCIZIO 2.1 - Determinare parte reale e parte immaginaria delle seguenti funzioni complesse di variabile complessa:

$$\begin{array}{lll} s^2+3s-j; & s+5s^2; & 1/(s-j); \\ js+1/s; & 4\overline{s}+\exp(s); & |s|+j; \\ |s|s+j; & s\exp(-4s); & \overline{s}+|2js|; \\ |s|-s; & 4\overline{s}\exp(s); & -s\overline{s}+j. \end{array}$$

ESERCIZIO 2.2 - Stabilire se le seguenti funzioni complesse sono analitiche, oppure no:

$$\begin{array}{lll} 2(s+s\overline{s}); & s\exp(-4s); & |s|+js; \\ e^s-e^{2s}; & 4\overline{s}\exp(s); & 4s\overline{s}; \\ (s+1)e^s; & 4s^2\exp(s); & s/(1+|s|); \\ s-|s|; & js\sin(2s); & j(|s|+s). \end{array}$$

ESERCIZIO 2.3 - Determinare, se esistono, le funzioni $F = F(s)$ analitiche tali che

$$\begin{array}{ll} a)\ \mathrm{Re}\,F(s)=3(x^2-y^2) & b)\ \mathrm{Re}\,F(s)=-y^3+9x^2; \\ c)\ \mathrm{Im}\,F(s)=y; & d)\ \mathrm{Re}\,F(s)=x^2+4x-y^2; \\ e)\ \mathrm{Re}\,F(s)=x^2+2x-y^2; & f)\ \mathrm{Im}\,F(s)=x^2+y^2; \\ g)\ \mathrm{Re}\,F(s)=\mathrm{Re}\,s+\mathrm{Im}\,s; & h)\ \mathrm{Re}\,F(s)=7xy+5x^2. \end{array}$$

3 Classificazione Singolarità

Esercizio 3.1 - Classificare le singolarità delle funzioni razionali:

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+js+1}; \qquad f_3(s) = \frac{s-j}{s^2-1+2js}$$

$$f_4(s) = \frac{s^2-1}{s^3+6s^2+5s-12}; \qquad f_5(s) = \frac{js^4}{(s+1)^4}; \qquad f_6(s) = \frac{js^4}{s^4+1}.$$

Esercizio 3.2 - Classificare le singolarità delle funzioni non razionali:

$$g_1(s) = \frac{s+1}{e^s(s-1)}; \qquad g_2(s) = \frac{s+1}{(e^s-1)s}; \qquad g_3(s) = \frac{se^{1/s}}{s^2-9};$$

$$g_4(s) = \frac{\sin(1/s)}{s^2-5s}; \qquad g_5(s) = \frac{s^2+4s+3}{\sin s}; \qquad g_6(s) = \frac{s^2+4s+3}{e^s};$$

$$g_7(s) = \frac{\sin(2s)}{s^2-2s}; \qquad g_8(s) = \frac{\sin(2s)}{(s^2-2s)^2}; \qquad (*)\ g_9(s) = e^{1/s^2}\sin(s^2+5).$$

Soluzioni Esercizio 3.1 -

f_1 : $\pm j$ poli semplici; ∞ p. regolare;

f_2 : $-(\sqrt{5}+1)j/2, (\sqrt{5}-1)j/2$ poli semplici; ∞ polo semplice;

f_3 : $-j$ polo doppio; ∞ zero semplice;

f_4 : $-4, -3$ poli semplici; 1 sing. eliminabile; ∞ zero semplice;

f_5 : -1 polo quarto ordine; ∞ p. regolare;

f_6 : $\pm(\sqrt{2}/2) \pm j(\sqrt{2}/2)$ poli semplici; ∞ p. regolare.

Soluzioni Esercizio 3.2 -

g_1 : 1 polo semplice; ∞ essenziale;

g_2 : 0 polo doppio; $2k\pi j, k = \pm1, \pm2, \cdots,$ poli sempl.; ∞ sing. non isolata;

g_3 : 0 essenziale; ± 3 poli semplici; ∞ zero semplice;

g_4 : 0 essenziale; 5 polo semplice; ∞ zero ordine 3;

g_5 : $k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$ poli semplici; ∞ sing. non isolata;

g_6 : ∞ essenziale;

g_7 : 0 eliminabile; 2 polo semplice; ∞ essenziale;

g_8 : 0 polo semplice; 2 polo doppio; ∞ essenziale;

g_9 : 0 essenziale; ∞ essenziale.