ANALISI MATEMATICA 3
ELM+TEM
A.A. 2010-2011
ESERCIZI parte seconda

March 22, 2011

1 Trasf. di Fourier

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire se le seguenti funzioni razionali ammettono trasformata di Fourier, specificando se in L^1 e/o in L^2Calcolare, se esiste, la trasformata di Fourier delle seguenti funzioni:

$$f_1(t) = \frac{1}{t^2 + 5t + 8}; \; f_2(t) = \frac{t-2}{t^2 + 5t + 8};$$
$$f_3(t) = \frac{2}{3 + 2t^2}; \; f_4(t) = \frac{t+1}{2t^2 + 3};$$
$$f_5(t) = \frac{t+5}{t^2 + 2t - 1}; \; f_6(t) = \frac{5}{t^2 - 5t - 4}.$$

ESERCIZIO 1.2 - Per le funzioni di cui all'Esercizio 1.1. che ammettono trasformata di Fourier, calcolarne la trasformata e specificare se tale trasformata $F \in L^1$ oppure $\in L^2$. Calcolare poi la trasformata di Fourier delle funzioni, dove f_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 1.1 che ammettono trasformata di Fourier.

$$g_i(t) = f_i(t)e^{5jt}$$
$$h_i(t) = f_i(t - 9).$$

ESERCIZIO 1.3 - Stabilire se le seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 oppure no. In caso affermativo, calcolare l'antitrasformata di Fourier:

$$F_1(\omega) = \frac{2\omega^3}{\omega^2 + j};\ F_2(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2 - j};$$
$$F_3(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4};\ F_4(\omega) = \frac{2\omega^2}{\omega^2 + \omega + 6};$$
$$F_5(\omega) = \frac{1}{\omega + j};\ F_6(\omega) = \frac{\omega - 4}{(\omega - 4)^2 + 6};$$
$$F_7(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + \omega + 6};\quad F_8(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + j}.$$

ESERCIZIO 1.4 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove F_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 1.3 che appartengono a L^2.

ESERCIZIO 1.5 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$F_1(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}; F_2(s) = \frac{5s^2 + 4}{s^2 - 16}; F_3(s) = \frac{5s + 4}{s^2 + 16};$$
$$F_4(s) = \frac{1 + s}{|s|^2};\quad F_5(s) = \frac{1}{|s|};\ F_6(s) = \frac{js - 1}{s^2 + 4j}..$$

2 Trasformata Laplace

Esercizio 2.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$
\begin{aligned}
F_1(s) &= \frac{1}{s^2+4s+5};\ F_2(s) = \frac{1}{s^2+4s+3};\\
F_3(s) &= \frac{1}{s^3+2s^2+s};\ F_4(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)};\\
F_5(s) &= \frac{1}{(s-1)^2(s+2)};\qquad F_6(s) = \frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una distribuzione?

$$
\begin{aligned}
G_1(s) &= \frac{s^2+4}{s^2-4};\ G_2(s) = \frac{s^2+4}{s^2-4s};\ G_3(s) = \frac{s+4}{s^2-4};\\
G_4(s) &= \frac{s^2+4}{s^3-4};\ G_5(s) = \frac{s^3+4s}{s^2-4}; G_6(s) = \frac{s^4+4}{s^2-4s};\\
G_7(s) &= \frac{s}{s^4-4};\ G_8(s) = \frac{4}{s^2-4};\ G_9(s) = \frac{s^4+4s^2}{s^3-4}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali ammette trasformata di Laplace in senso classico? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t<0$). In caso affermativo, si determini l'ascissa di convergenza α_f.

$$
\begin{array}{ll}
f_1(t) = e^{-t^2}; & f_2(t) = t^7 + 14t^6;\\
f_3(t) = t\cos t; & f_4(t) = e^t \cos t^2;\\
f_5(t) = e^{t^2}\cos t; & f_6(t) = t^{-4}.
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};\\
g_2(t) &= \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};\\
g_3(t) &= \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4\\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Soluzioni Esercizio 2.1 Per $t > 0$ si ha:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= e^{-2t} \sin t \\
f_2(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\
f_3(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\
f_4(t) &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t \\
f_5(t) &= \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^{t} + 3te^{t}) \\
f_6(t) &= 2e^{t} + e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).
\end{aligned}
$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).