# ANALISI MATEMATICA III
# A.A. 2011-2012
traccia della lezione del 9 marzo 2012

March 9, 2012

## 1 Spazi normati

Sia $V$ uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in $V$* ogni applicazione $||\cdot||$

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} ||f|| \geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ ||\alpha f|| = |\alpha| \; ||f|| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ ||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| & \forall f, g \in V \end{array}$$

e lo spazio $V$ si chiama *spazio normato.*

Ad esempio, se $V$ è lo spazio delle funzioni continue in $[0,T]$, ossia $V = C[0,T]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0,T]$ le seguenti ($f \in C[0,T]$):

$$||f||_M = \max_{t\in[0,T]} |f(t)|$$

$$||f||_1 = \int_0^T |f(t)|dt$$

$$||f||_2 = \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- **Ogni spazio normato $V$ è anche uno spazio metrico, con distanza $d$ data da**

$$d(f,g) = ||f-g|| \qquad\qquad (f,g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0,T]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) $(f,g \in C[0,T])$:

$$d_M(f,g) = ||f-g||_M = \max_{t\in[0,T]} |f(t)-g(t)|$$
$$d_1(f,g) = ||f-g||_1 = \int_0^T |f(t)-g(t)|dt$$
$$d_2(f,g) = ||f-g||_2 = \left(\int_0^T |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1-t), g(t) = t/2$ e sia $T = 1$. Si verifichi che in $C[0,1]$, per le distanze sopra definite si ha

$$d_M(f,g) = 1/2, \qquad d_1(f,g) = 1/8.$$

# 2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia $f$ una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e tale limite è indipendente da $a,b$, allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

e diremo che $f$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di $f$, esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che $f$ non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che $f$ non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di $f$, esteso a $\mathbb{R}$ non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$) e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \tag{2}$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se $f$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \;\not\Rightarrow\; \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \;.$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4+1} dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge ($f$ è illimitata!).

# 3 Gli spazi $\mathbf{L}^p$

Sia $f$ una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia $p$ un numero reale $p \geq 1$. Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$ se $\mid f \mid^p$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1, f$ si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se $p = 2$, $f$ si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati ( e quindi anche metrici). In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da $(f, g \in L^1(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt, \quad d_{L^1}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|dt.$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da $(f, g \in L^2(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad d_{L^2}(f,g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$ : ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$ ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Vale il seguente:

**Teorema** *Sia $f$ una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ .Allora l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

*converge se e solo se $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia se e solo se $f$ è assolutamente integrabile sull'intero asse reale.*

# 4 Trasformata di Fourier in $L^1$

Sia $f$ una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in $L^1$)* di $f$ la funzione $F$ definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{3}$$

dove $\omega$ è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni $\omega$ reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

  $$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \; dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \; dt}_{(+)}$$

  $(*)$ si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e $(+)$ *Trasformata seno di Fourier.*

# 5 Antitrasformata

Vale il seguente teorema.

**Teorema** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che $f$ sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia $L$. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{4}$$

La formula (4) è detta formula dell'antitrasformata di Fourier.

Si osservi che (3) è una definizione e vale sotto la sola condizione $f \in L^1(\mathbb{R})$. La formula dell'antitrasformata (4) è invece conseguenza di un Teorema e richiede una condizione aggiuntiva, ossia che $f$ sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia $L$.

**In questa parte vengono brevemente presentati alcuni richiami sui numeri complessi, già visti nei precedenti corsi di matematica. Per maggiori dettagli si rimanda a tali corsi oppure alle tracce delle lezioni di Applicazioni di Matematica in questo stesso sito. Si raccomanda di prendere familiarita' con questi concetti, anche svolgendo gli esercizi finali.**

**Nelle prossime lezioni verrano richiamate altre proprietà delle funzioni complesse e la teoria dei Residui, visti nel corso di Applicazioni di Matematica.**

# 6 Richiami sui numeri complessi

## 6.1 Forma algebrica.

Un numero complesso $z$ in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $j$, detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri $a$ e $b$ sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di $z$ e si indicano con

$$a = \mathrm{Re} z, b = \mathrm{Im} z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri $z$ per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale*. Analogamente, i numeri $z$ per cui $a = 0$ chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario.*

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a+jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* $z$, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se $z$ è rappresentato nel piano dal punto $A$, il coniugato di $z$ è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di $A$ rispetto all'asse reale. Si chiama poi *modulo di z*, e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z$ :

$$\begin{aligned} z\ \bar{z} &= |z|^2 \\ \mathrm{Re}z &= (z + \bar{z})/2 \\ \mathrm{Im}z &= (z - \bar{z})/2j. \end{aligned}$$

## 6.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned} z + s &= (a + c) + (b + d)j \\ z - s &= (a - c) + (b - d)j \\ zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\ \frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} j \text{ (se } s \neq 0). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi.

## 6.3 Norma e distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio normato con norma data dal modulo, i.e. se $z = a + jb$ allora

$$||z|| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Pertanto $\mathbb{C}$ è anche uno spazio metrico, dove la distanza $d(z, s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z, s) = ||z - s|| = |z - s|.$$

Si chiama *intorno* di un punto $z_0$ in $\mathbb{C}$ di raggio $\delta$ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro $z_0$ e raggio $\delta$.

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1, \tag{5}$$

avendosi

$$|z - 3 + 2j| = |z - (3 - 2j)|$$

(5) rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $z_0 = 3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

## 6.4 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di z*, e si indica con $\arg z$, l'angolo $\theta$ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a + jb$, indicando con $\rho$ il modulo di $z$, risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Le formule di passaggio sono quindi:

$$\begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

## 6.5 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del prodotto e del rapporto di tali due numeri ($s_1, s_2 \neq 0$). Esprimendo $s_1$ e $s_2$ in forma trigonometrica: $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$, si ha

$$s_1 s_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)]$$
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$\left(\sqrt{3} + j\right)^6 = -64.$$

## 6.6 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ..... + \frac{s^i}{i!} + .....$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso $s$ e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:

2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:

3. $e^{jy} = \cos y + j\sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j\sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

Pertanto
$$e^s = e^x \cos y \; + \; j \; e^x \sin y.$$

Di conseguenza:

$$|e^s| = e^x = e^{\mathrm{Re} s}, \; \mathrm{Arg}(e^s) = y = \mathrm{Im}(s),$$
$$\mathrm{Re}\, e^s = e^x \cos y = e^{\mathrm{Re}\, s} \cos \mathrm{Im}\, s,$$
$$\mathrm{Im}\, e^s = e^x \sin y = e^{\mathrm{Re}\, s} \sin \mathrm{Im}\, s$$

4. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

5. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $e^s$ è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

## 6.7 Esercizi

**ESERCIZIO 1** - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$3j; -2;\; 1+j;\; \; -1-j;\; 1+j\sqrt{3};\; 3-j\sqrt{3};\; \; -j\sqrt{5};$$
$$(1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j);\; \; -2+5j.$$

**ESERCIZIO 2 -** Utilizzando le formule di De Moivre, calcolare:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8;\; \frac{(3+3j)^9}{j^6};\; \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

**ESERCIZIO 3 -** Sia

$$z_1 = e^{5j},\; z_2 = e^{1+\pi j}, z_3 = e^{-2\pi(j+4)}, z_4 = e^{j\pi/2} e^j,$$
$$z_5 = 1 + je^{j2\pi}, z_6 = e^j / e^{-3j}, z_7 = 5e^{-j}/e^j.$$

Per ciascun $z_i$, $(i = 1, .., 7)$ calcolare Re $z_i$, Im $z_i$, $|z_i|$, Arg $z_i$.