ANALISI MATEMATICA III (ELM+TEM) A.A. 2010-2011

Traccia delle lezioni del 14 e 16 marzo 2012

March 16, 2012

1 Prime proprietà della trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F, ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \to \infty$.*

Corollario. *La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi $f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è di classe C^1 e si ha:*

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j\frac{d}{d\omega}F(\omega).$$

Si osservi che le due ipotesi "$f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$" sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f, data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g, data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

si ha "$g \notin L^1(\mathbb{R})$" *e* "$tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$" .

Si osservi inoltre che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente, come illustra l'esempio della trasformata dell'impulso esponenziale, che sarà analizzato la prossima lezione.

Dal teorema precedente seguono poi i seguenti:

Corollario 1 *Sia $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, ..., N$. Allora la trasformata di Fourier F di f è una funzione di classe $C^N(\mathbb{R})$.*

Corollario 2 *Sia f a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. Sia f assolutamente integrabile in $[a, b]$. Allora f è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata F è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

2 Esempi

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f_R(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \le L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_R(\omega) = 2ML\text{sink}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1}\sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases} .$$

Si osservi che F_R è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_R \in C^\infty(\mathbb{R})$, ma $F_R \notin L^1(\mathbb{R})$. Quindi, in generale, in $L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier non può essere iterata.

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f_T(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_T(\omega) = \frac{2M(1-\cos\omega)}{\omega^2} \text{per } \omega \neq 0, F_T(0) = M.$$

ossia, usando le formule di duplicazione del coseno,

$$F_T(\omega) = M\left(\text{sink}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2.$$

Si osservi che F_T è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_T \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_T \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f_G(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_G(\omega) = \sqrt{2\pi}\exp((-\omega^2/2).$$

Anche in questo caso F_G è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_G \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_G \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f_E(t) = \exp(-|t|);$$

ovviamente $f_E \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha con facili calcoli, utilizzando le proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ (vedi paragrafo seguente)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-j\omega t}dt = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Pertanto la trasformata di Fourier di f_E è la funzione

$$F_E(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Si osservi che F_E è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_E \in L^1(\mathbb{R})$ e $F_E \in C^\infty(\mathbb{R})$.

3 Derivazione

Teorema (Derivazione) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f\,'\right\} = j\omega \mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Tale risultato può essere provato integrando per parti l'integrale

$$\mathfrak{F}\left\{f\,'\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f\,'(t) e^{-j\omega t} dt$$

e usando la proprietà:

$$f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \lim_{|t| \to +\infty} f(t) = 0.$$

Corollario 1 *Sia* $f \in C^N(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}), ...f^{\,(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f^{\,(N)}\right\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ *e* $f \in L^1(\mathbb{R}), f\,' \in L^1(\mathbb{R}), f\,'' \in L^1(\mathbb{R})$. *allora*

$$\mathfrak{F}\left\{f\,''\right\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\left\{f\right\}.$$

Si osservi che l'ipotesi "$f \in C^1(\mathbb{R})$" nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

4 Trasformata in L^1

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{1}$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{2}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinchè la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario 2 *Sia $f \in C^n(\mathbb{R}), f.\ f', ..., f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $F = o(\omega^{-n})$ per $|\omega| \to \infty$, ossia*

$$\lim_{|\omega| \to \infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Il significato di tale Corollario è il seguente: "*la trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ tende a zero (per $|\omega| \to +\infty$) tanto più velocemente, quanto più f è "liscia" (e con derivate in $L^1(\mathbb{R})$)*"

Corollario 3 *Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f.\ f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono.*

5 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in L^2

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *Allora:*
1) L'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, *eccetto, al più, un insieme di misura nulla.*
Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,$$

si ha inoltre:
2) $F \in L^2(\mathbb{R})$
3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche **principio di conservazione della norma (o dell'energia).**
La proprietà 1) suggerisce la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; si chiama *Trasformata di Fourier in* L^2, la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{3}$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (3) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di

Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1, vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata in $L^1(\mathbb{R})$ non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1, vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

6 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ la sua trasformata. Allora $F \in L^2(\mathbb{R})$ e*

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f, a meno di un fattore 2π.

Conseguenze:

♦ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \ \mathrm{sink}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML \ \mathrm{sink}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M \text{ se } |\omega| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che tale trasformata non è continua in $\mathbb{R}$. Infatti $g \notin L^1(\mathbb{R})$!

♦ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$h(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$H(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$\varphi(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{\varphi(t)\} = \Phi(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Si osservi che tale trasformata non è derivabile in $\omega = 0$ (ed infatti $t\varphi(t) \notin L^1(\mathbb{R})$.

7 Il teorema del campionamento (Shannon)

Si veda Cap. 3.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

8 APPENDICE

In questa parte vengono brevemente presentati alcuni richiami sulle funzioni complesse e la teoria dei Residui, visti nel corso di Applicazioni di Matematica. Per maggiori dettagli si rimanda a tale corso e alle tracce delle lezioni di Applicazioni di Matematica in questo stesso sito. Si raccomanda di prendere familiarita' con i concetti qui presentati, anche svolgendo gli esercizi finali.

8.1 Funzioni complesse : generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = s^2 + 1$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 7js + s^2 \\ f_2(s) &= s + |s|^2 \\ f_3(s) &= (5j - 1)s \\ f_4(s) &= |s| - 5j \end{aligned}$$

9 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0, raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t + x_0 \\ y(t) &= \rho \sin t + y_0 \end{aligned}$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0), raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

10 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

11 Teorema di Cauchy

Sia H la funzione

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}, \tag{4}$$

dove N e D sono polinomi primi tra loro e α è un numero complesso fissato. Utilizzando il Teorema di Cauchy, visto nel corso di Applicazioni di Matematica e al quale si rimanda, si ottiene il seguente:

Teorema *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e percorsa in senso positivo (antiorario). Sia la funzione H, definita in (4), continua sulla curva Γ (ossia $D(s) \neq 0$ se $s \in \Gamma$). Siano poi $s_1, s_2, ..s_N$ gli zeri del polinomio D **interni** alla curva Γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma H(s) ds = Res[H, s_1] + Res[H, s_2] + ... + Res[H, s_N]$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i.

Il $Res[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica al quale si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso particolare considerato.

- **Se s_0 è una radice semplice di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}.$$

- **Se s_0 è una radice doppia di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^2 \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

- **In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

Esercizio - Per le funzioni

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+5s+4}; \qquad f_3(s) = \frac{se^{5s}}{s^2-1}$$
$$f_4(s) = \frac{3se^{-2s}}{s^3+6s^2+5s}; \qquad f_5(s) = \frac{s}{(s+j)^2}; \qquad f_6(s) = \frac{e^s}{(s+1)^2}.$$

calcolare

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa in senso positivo (antiorario).