APPLICAZIONI di MATEMATICA A.A. 2012-2013

Tracce delle lezioni del 24 e 27 settembre 2012

September 27, 2012

1 Analiticita' e funzioni armoniche

Come abbiamo visto nella lezione scorsa, una funzione $h : R^2 \to R, h = h(x, y)$ è armonica in un aperto Ω se in tale aperto h soddisfa l'equazione (di Laplace)

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0. \tag{1}$$

Utilizzando il fatto (che sarà visto in seguito) che una funzione complessa f è analitica in un insieme aperto Ω se e solo se $f \in C^\infty(\Omega)$, si ha allora il seguente

Teorema *Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0. Allora le funzioni*

$$u = \mathrm{Re}\, f, \qquad v = \mathrm{Im}\, f$$

sono funzioni armoniche in tale intorno, ossia in tale intorno verificano le equazioni

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Viceversa sia $u = u(x, y)$ $[v = v(x, y)]$ una funzione armonica in un intorno I di (x_0, y_0). Allora esiste una funzione analitica f, individuata a meno di una costante reale, tale che $\mathrm{Re}\, f = u$ $[\mathrm{Im}\, f = v]$.

Corollario *Una funzione $u = u(x, y)$, definita in un intorno I di un punto (x_0, y_0) è parte reale di una funzione analitica in I se e solo se u è armonica in tale intorno, ossia soddisfa l'equazione (1) in I. Analogamente una funzione $v = v(x, y)$, definita in I è parte immaginaria di una funzione analitica in I se e solo se v è armonica in I, ossia soddisfa l'equazione (1) in I.*

Esempi. La funzione $u(x, y) = 2xy + y$ è parte reale di una funzione analitica. La funzione $v(x, y) = x^2 + 4xy$ non è parte immaginaria di una funzione analitica. Analogamente, la funzione $u(x, y) = 2x - 7y^2$ non è parte reale di una funzione analitica.

2 Ricostruzione di una funzione analitica f, assegnata la parte reale $u = \mathrm{Re}\, f$ oppure la parte immaginaria $v = \mathrm{Im}\ f$.

Utilizzando i risultati precedenti e le formule di Cauchy-Riemann, è possibile determinare tutte le funzioni analitiche aventi una parte reale (o immaginaria) assegnata e armonica.

Procediamo con un esempio. La funzione $u(x, y) = 6xy - x - 2$, come è immediato verificare, è armonica. Troviamo dunque le funzioni f tali che $\mathrm{Re}\, f = u$.

Si ha

$$u_x(x, y) = 6y - 1, \qquad u_y(x, y) = 6x$$

Tenendo conto delle formule di Cauchy-Rieman si ottiene

$$v_y(x, y) = 6y - 1$$
$$v_x(x, y) = -6x$$

Integrando la prima equazione rispetto a y e la seconda rispetto a x si ha rispettivamente

$$v(x, y) = 3y^2 - y + c(x)$$
$$v(x, y) = -3x^2 + d(y)$$

dove $c = c(x)$ è una funzione della **sola** x e $d = d(y)$ è una funzione della **sola** y. Allora

$$3y^2 - y + c(x) = -3x^2 + d(y)$$

ossia

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x)$$

Poichè il primo membro dipende solo da y e il secondo soltanto da x, necessariamente entrambi devono essere costanti, ossia esiste una costante reale k tale che

$$-3y^2 + y + d(y) = 3x^2 + c(x) = k.$$

Ne segue $c(x) = -3x^2 + k$ e quindi $v(x, y) = 3y^2 - y + -3x^2 + k$. In definitiva si ottiene

$$\begin{aligned} f(s) = f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y) = \\ = [6xy - x - 2] + j[3y^2 - y + -3x^2 + k] \end{aligned} \tag{2}$$

Per determinare l'espressione di f in funzione della variabile s si puo' usare il seguente:

Teorema di Weierstrass (dell'unicità dell'estensione analitica) *Sia* $\widehat{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Allora esiste al più una estensione di* $\widehat{h}$ *al piano complesso che risulti analitica, i.e. esiste al piu' una funzione* $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *analitica e tale che* $h(x) = \widehat{h}(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Il teorema di Weierstrass è un risultato di "unicità" e sinteticamente è chiamato "Teorema dell'unicità dell'estensione analitica".

Il (semplice) procedimento è il seguente. Da (2) si ha

$$\widehat{h}(x) = f(x + j0) = -x - 2 - 3x^2 j + kj. \tag{3}$$

Si consideri poi l'estensione a $\mathbb{C}$ della funzione $\widehat{h}$, ossia si consideri la funzione h ottenuta da (3) sostituendo x con s :

$$h(s) = -s - 2 - 3s^2 j + kj. \tag{4}$$

Le funzioni (2) e (4) sono due estensioni **analitiche** della stessa funzione $\widehat{h}$. Allora, per il Teorema di unicità di Weierstrass, tali funzioni devono necessariamente coincidere, e quindi

$$f(s) = -s - 2 - 3s^2 j + kj.$$

- Determinare le funzioni analitiche tali che $u(x,y) = 3(x^2 - y^2)$ [Risposta $f(s) = 3s^2 + jk$].
- Determinare la funzione analitica f tale che $\mathrm{Re}\, f = x + 10xy$, $f(0) = 0$.

3 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a,b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a,b) [i.e. $x, y \in C^1(a,b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a,b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a,b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempi. (i) La curva

$$\gamma(t) = \cos t + j \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro l'origine, raggio 1 e percorsa in senso antiorario (il senso delle "t crescenti"). Ricordando le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}, \tag{5}$$

tale curva si puo' esprimere anche nella forma compatta

$$\gamma(t) = e^{jt}, t \in [0, 2\pi].$$

(ii) La curva

$$\gamma(t) = 6 + 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro 6, raggio 3 e percorsa in senso antiorario.

(iii) La curva

$$\gamma(t) = 1 + j + 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro $1 + j$, raggio 2 e percorsa in senso antiorario.

(iv) La curva

$$\gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi]$$

rappresenta una semicirconferenza di centro l'origine, raggio 2, giacente nel 1^o e 2^o quadrante e percorsa in senso antiorario.

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare; si chiama *lunghezza di* γ il numero reale

$$L_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)|dt = \int_a^b |x'(t) + jy'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$$

4 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di* f *esteso a* γ il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))y'(t)dt.$$

Esempi: Calcolare i seguenti integrali:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} |s|ds \text{ dove } \gamma_1(t) = 4e^{jt}, t \in [0, \pi];$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} |s|ds \text{ dove } \gamma_2(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi];$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \overline{s}ds \text{ dove } \gamma_3(t) = e^{jt}, t \in [0, \pi/2];$$

$$I_4 = \int_{\gamma_4} sds \text{ dove } \gamma_4(t) = 2e^{jt}, t \in [0, \pi/2].$$

Si ha $I_1 = -32, I_2 = 0, I_3 = \pi j/2, I_4 = -4$.

"**Esercizio**" Si ha

$$\int_C \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j,$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, i.e. C è una circonferenza di centro s_0, raggio r e percorsa (**una sola volta**) in senso antiorario (positivo).

5 Proprietà dell'integrale in C

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):

$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)] ds = c_1 \int_\gamma f_1(s) ds + c_2 \int_\gamma f_2(s) ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_\gamma f(s) ds = -\int_{-\gamma} f(s) ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma 1 + \gamma 2} f(s) ds = \int_{\gamma 1} f(s) ds + \int_{\gamma 2} f(s) ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left| \int_\gamma f(s) ds \right| \leq L_\gamma \max_{s \in \gamma} |f(s)|$$

   dove L_γ indica la lunghezza della curva γ.

6 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ. Allora:*

$$\int_\gamma f(s) ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che, in una regione in cui f è analitica, **l'integrale è indipendente dal cammino.**

Si osservi che se la funzione integranda non è analitica in TUTTA la regione limitata dalla curva γ, allora l'integrale puo' non essere nullo, come illustra l'esempio visto in precedenza

$$\int_C \frac{1}{s-s_0} ds = 2\pi j. \tag{6}$$

dove $C(t) = s_0 + re^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

Teorema 2 (di Cauchy) *Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso con γ_1 contenente γ_2 [vedi figura 1]. Sia s_0 un punto interno a γ_2 e sia f analitica all'interno di γ_1 eccetto il punto s_0. Sia poi f continua su γ_1. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(s) ds = \int_{\gamma_2} f(s) ds.$$

Tale risultato esprime il fatto che l'integrale lungo una curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa non cambia se si "deforma con continuità la curva" purchè la funzione considerata sia analitica in tutta la regione compresa tra la curva originaria e la curva "deformata".

Ricordando l'integrale (6), si ha allora

$$\int_{\gamma} \frac{1}{s-s_0} ds = 2\pi j$$

dove γ è una **qualunque** curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa **contenente al proprio interno** il punto s_0.

Teorema 3 (di Cauchy) *Siano Γ, γ_1 e γ_2 tre curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso poste come in figura 2. Siano s_1 e s_2 due punti interni rispettivamente a γ_1 e γ_2 e sia f analitica all'interno di Γ eccetto i punti s_1 e s_2. Sia poi f continua su Γ. Allora*

$$\int_{\Gamma} f(s) ds = \int_{\gamma_1} f(s) ds + \int_{\gamma_2} f(s) ds.$$

7 Radici in campo complesso e risoluzione di equazioni algebriche.

Determinare le radici n-esime di un dato numero complesso $s_0 \neq 0$ significa risolvere l'equazione $z^n = s_0$. Utilizzando la forma trigonometrica $s_0 = \rho_0(\cos\theta_0 + j\sin\theta_0)$, $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$ (ρ_0, θ_0 dati del problema, ρ, θ incognite), mediante l'utilizzo delle formule di De Moivre si ottiene

$$\rho^n = \rho_0, \quad n\theta = \theta_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Infatti due numeri complessi coincidono se e solo se hanno uguale modulo e argomento che differisce per multipli di 2π. Essendo ρ_0 reale positivo, la prima equazione ha come unica soluzione $\rho = \sqrt[n]{\rho_0}$ (radice reale). Dalla seconda: $\theta = \theta_0/n + 2k\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$; si osserva che soltanto per $k = 0, 1, \ldots n-1$ risulta $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto le radici n-esime di s_0 sono date da:

$$\sqrt[n]{s_0} = \sqrt[n]{\rho_0}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + j\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

dove $\rho_0 = |s_0|$, $\theta_0 = \mathrm{Arg(s_0)}$.

Pertanto:

- **Le radici distinte sono esattamente** n.
- **Tali radici hanno tutte lo stesso modulo** e quindi si trovano su una medesima circonferenza, di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho_0}$.
- Tali radici **sono i vertici di un poligono regolare di** n **lati, inscritto in tale circonferenza.** Quindi tali radici differiscono tra loro per una rotazione di un multiplo di $2\pi/n$.

La radice n-esima in $\mathbb{C}$ quindi *non* è una funzione, ma una applicazione a più valori. Ad esempio la radice quadrata in $\mathbb{C}$ restituisce due valori (opposti) ($\sqrt{-4} = \pm 2j$).

8 Funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

Si definiscono le funzioni trigonometriche seno e coseno in $\mathbb{C}$ come estensione al campo complesso delle formule di Eulero nel modo seguente:

$$\sin s =_{\mathrm{def}} \frac{e^{js} - e^{-js}}{2j}, \qquad \cos s =_{\mathrm{def}} \frac{e^{js} + e^{-js}}{2}, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Le principali proprietà di tali funzioni sono le seguenti.

1. Le funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ sono le estensioni al campo complesso delle corrispondenti funzioni reali;

2. Le *formule trigonometriche* note in campo reale e che non coinvolgono disuguaglianze, continuano a valere in $\mathbb{C}$. Ad esempio sono valide (e la verifica è immediata) l'identità fondamentale

$$\sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

   le formule di somma, di sottrazione, di duplicazione, ecc... .

3. Le funzioni seno e coseno sono *periodiche* di periodo 2π.

4. La funzione seno è dispari, mentre la funzione coseno è pari:

$$\sin(-s) = -\sin s, \qquad \cos(-s) = \cos s.$$

5. Valgono le relazioni

$$\begin{aligned} \sin s &= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \\ \cos s &= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y, \end{aligned}$$

   da cui segue

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\ \ \sin s = \sin x \cosh y, \qquad \mathrm{Im}\ \ \sin s = \cos x \sinh y \\ &\mathrm{Re}\ \ \cos s = \cos x \cosh y, \qquad \mathrm{Im}\ \ \cos s = -\sin x \sinh y. \end{aligned} \tag{7}$$

6. Utilizzando (7) e le formule di Cauchy Riemann si ottiene facilmente che le funzioni seno e coseno sono *analitiche* in tutto $\mathbb{C}$ e vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sin s = \cos s, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \cos s = -\sin s;$$

   inoltre valgono le relazioni

$$\overline{\sin s} = \sin \overline{s}, \qquad \overline{\cos s} = \cos \overline{s}.$$

7. Le funzioni seno e coseno *assumono tutti i valori complessi*. Dunque l'equazione $\sin s = \alpha$ ammette infinite soluzioni qualunque sia $\alpha \in \mathbb{C}$, e analogamente $\cos s = \alpha$. Di conseguenza **le funzioni seno e coseno NON sono limitate in** $\mathbb{C}$.

8. Se $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$, l'equazione $\sin s = a$ ha come soluzioni *tutte e sole* le soluzioni (reali) di $\sin x = a$ in $\mathbb{R}$; analogo per il coseno. Quindi, in particolare scegliendo $a = 0$ si ha che **gli zeri delle funzioni seno e coseno in** $\mathbb{C}$ **coincidono con gli zeri delle corrispondenti funzioni reali.**

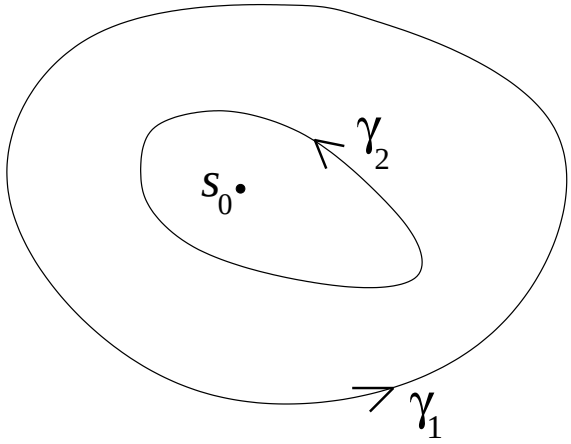

Figura 1

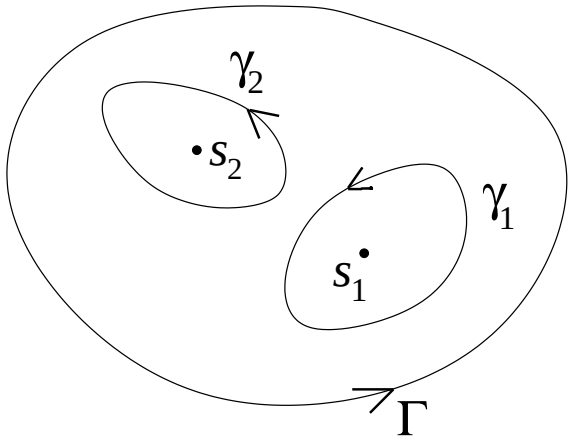

Figura 2