

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2012-2013

Tracce delle lezioni del 1 e 4 ottobre 2012

October 4, 2012

1 Singolarità

Definizione 1 - Un punto s_0 si dice **punto singolare per** f se non esiste alcun intorno I di s_0 tale che f sia analitica in **TUTTO** I .

Definizione 2 - Sia s_0 un punto singolare per f . Allora s_0 si dice **punto singolare isolato** (o **singolarità isolata**) se esiste un intorno V di s_0 tale che f sia analitica in $V \setminus \{s_0\}$ (i.e. f è analitica in tutto V eccetto s_0). Altrimenti il punto s_0 si dice **non isolato** (o **punto di accumulazione**).

Esempi

$$f_1(s) = \frac{s^2 + 1}{(s - 2)(s - 4)^3} \Rightarrow s = 2, s = 4 \text{ sono sing. isolate.}$$

$$f_2(s) = \bar{s} \quad \Rightarrow \text{ogni punto } s \in \mathbb{C} \text{ è una sing. non isolata}$$

$$f_3(s) = \frac{1 - \cos s}{s^2} \Rightarrow s = 0 \text{ è singolarità isolata}$$

$$f_4(s) = \sin(1/s) \Rightarrow s = 0 \text{ è sing. isolata}$$

$$f_5(s) = \frac{1}{\sin(1/s)} \Rightarrow s = 0 \text{ è sing. non isol., } s_k = \frac{1}{k\pi} \text{ sono sing. isol. } (k \neq 0).$$

Per quanto riguarda l'ultimo esempio, il ragionamento si basa anche sulla proprietà delle funzioni trigonometriche in campo complesso:

Gli zeri della funzione seno (o coseno) in \mathbb{C} coincidono con gli zeri della funzione seno (o, rispettivamente, coseno) in \mathbb{R} .

Definizione 3 - Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora s_0 si chiama:
 ◆ **singolarità eliminabile** se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \text{ esiste finito:}$$

◆ **singolarità polare** se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \infty;$$

◆ **singolarità essenziale** se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) \text{ non esiste.}$$

◆ Nel caso in cui s_0 sia una singolarità polare, allora s_0 si dice **polo di ordine** $N > 0$ (con N numero naturale) se

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0)^N f(s) \text{ è finito e diverso da } 0 .$$

In riferimento agli esempi di prima si ha: la funzione f_1 ha in $s = 2$ un polo semplice e in $s = 2$ un polo triplo. La funzione f_3 ha in $s = 0$ una sing. eliminabile. La funzione f_4 ha in $s = 0$ una singolarità essenziale. La funzione f_5 ha in $s_k = 1/(k\pi)$ ($k \neq 0$) singolarità polari semplici.

2 Serie di Laurent

Teorema di Laurent Sia f una funzione analitica in un intorno V di s_0 , eccetto, al più s_0 , ossia $f \in \mathbf{C}^1(V/\{s_0\})$. Ciò posto per $s \in V/\{s_0\}$ si ha

$$f(s) = \underbrace{\dots \frac{c_{-k}}{(s - s_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{s - s_0}}_{(+)} + \underbrace{c_0 + c_1(s - s_0) + \dots + c_k(s - s_0)^k + \dots}_{(*)} \quad (1)$$

dove i coefficienti c_k (chiamati coefficienti di Laurent) sono dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{k+1}} ds \quad (2)$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0 .

La serie (1) si chiama serie di Laurent in s_0 ; la serie di Laurent in s_0 è quindi una serie di potenze del binomio $(s - s_0)$ ad esponente intero (positivo, negativo, nullo). In particolare, la serie (+) in (1), relativa alle potenze del binomio $(s - s_0)$ ad esponente negativo si chiama **parte principale** della serie di Laurent e la parte (*) rimanente si dice **parte analitica**.

PROPRIETA':

- ◆ Lo sviluppo in serie di Laurent è unico.
- ◆ La serie di Laurent è derivabile termine a termine in ogni insieme chiuso contenuto in $V \setminus \{s_0\}$.

Teorema (IMPORTANTE!!) Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora:

- (i) s_0 è singolarità eliminabile se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata non c'è (i.e. $c_k = 0$ per ogni indice $k < 0$);
- (ii) s_0 è singolarità polare di ordine $N (> 0)$ se e solo se nella serie di Laurent associata si ha $c_{-N} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni indice $k > N$ (e quindi la parte principale è composta da un numero finito di termini);
- (iii) s_0 è singolarità essenziale se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata ha infiniti termini.

Attenzione a non confondere l'ordine del polo N con il numero degli elementi non nulli della parte principale della serie di Laurent. Analogamente, nel caso di singolarità essenziali la parte principale ha sì infiniti termini, ma non è detto che TUTTI i coefficienti c_{-i} , con $i > 0$, siano non nulli.

3 Serie di Taylor

Dal Teorema di Laurent si ha il seguente:

Corollario 1 (Taylor). Sia f analitica in tutto V , s_0 compreso. Allora per ogni $s \in V$ si ha

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s - s_0)^k = c_0 + c_1 (s - s_0) + \dots + c_k (s - s_0)^k + \dots \quad (3)$$

La formula (3) esprime il fatto che una funzione analitica in un intorno V di un punto s_0 è in tale intorno sviluppabile in serie di potenze e tale serie (i.e. (3)) si chiama *serie (o sviluppo) di Taylor di f in s_0* .

Dal Corollario 1 si ha poi il risultato (già anticipato):

Corollario 2. *Sia V un intorno di s_0 e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono **equivalenti**:*

- 1) $f \in C^1(V)$ [i.e. f è analitica in V];
- 2) le funzioni u, v ($u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) sono derivabili parzialmente in V con derivate continue ed inoltre in V valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$\begin{aligned}u_x(x, y) &= v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y);\end{aligned}$$

- 3) $f \in C^\infty(V)$;
- 4) f è sviluppabile in serie di potenze in V .

Si osservi che nell'ambito dell'analisi reale in generale si ha

$$\begin{aligned}1) &\not\Rightarrow 3) \\ 3) &\not\Rightarrow 4).\end{aligned}$$

ESERCIZIO

Usando la derivabilità termine a termine della serie (3) e l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor, si provi il seguente risultato

Corollario 3. *Sia f analitica in tutto V , s_0 compreso e sia (3) la serie di Taylor associata. Allora*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

- Utilizzando la proprietà che lo sviluppo di Taylor (3) è unico, si otten-

gono i seguenti sviluppi "notevoli":

$$\begin{aligned}
 e^s &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \dots + \frac{s^n}{n!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\
 \sin s &= s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\
 \cos s &= 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!} + \dots & \forall s \in \mathbb{C} \\
 \frac{1}{1-s} &= 1 + s + s^2 + \dots + s^n + \dots & \forall s : |s| < 1.
 \end{aligned}$$

- **Esercizio.** Si consideri la funzione $f(s) = s \sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

$$f(s) = s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^5} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{3!} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!} \frac{1}{s^4} + \dots$$

Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s \sin \frac{1}{s}$.

4 Classificazione del punto all'infinito.

La classificazione delle singolarità al finito si estende con facilità al punto all'infinito. Precisamente:

Definizione - Il punto $s = \infty$ si dice singolarità (isolata o non isolata e, nel primo caso, eliminabile, polare o essenziale) se lo è il punto $u = 0$ per la funzione $g(u) = f(1/u)$.

Esempi - Classificare il punto $s = \infty$ per le funzioni razionali

$$f(s) = \frac{2s}{9s+1}, \quad g(s) = \frac{2s^5}{9s+1}, \quad h(s) = \frac{2s}{9s^3+1}.$$

Per la funzione f , il punto $s = \infty$ è un punto di regolarità e così per h (in quest'ultimo caso $s = \infty$ è anche uno zero doppio). Per la funzione g , il punto $s = \infty$ è un polo di ordine 4.

In generale, una funzione razionale (i.e. il rapporto tra due polinomi N e D)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ha un polo in $s = \infty$ di ordine $p > 0$ se e solo se $\text{grado}N - \text{grado}D = p$.

Esercizio - Classificare $s = \infty$ per le funzioni seguenti:

$$f(s) = e^{1/s} \quad (s = \infty \text{ punto "regolare"})$$

$$f(s) = s \sin\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s = \infty \text{ sing. elim.})$$

$$f(s) = \frac{1}{\sin s} \quad (s = \infty \text{ sing. non isolata})$$

$$f(s) = e^s \quad (s = \infty \text{ sing. essenziale})$$

$$f(s) = \frac{s^3 + 1}{s + 4} \quad (s = \infty \text{ polo di ordine 2}).$$

Nella classificazione delle singolarità si rivelano particolarmente utili i seguenti:

Teorema *Ogni funzione **non** razionale ha singolarità essenziali e/o non isolate. Viceversa, se una funzione ha almeno una singolarità essenziale o non isolata, allora tale funzione è **non** razionale.*

Corollario *Sia f una funzione razionale. Allora f è costante oppure ha **soltanto** singolarità di tipo eliminabile e/o polare.*

Esercizio : Classificare le singolarità di

$$f_1(s) = \frac{\sin s}{(s-4)(e^s-1)}, f_2(s) = \frac{5s^2-s}{e^{4js}-1}.$$

5 Equazioni esponenziali e logaritmo in \mathbb{C} .

Sia s_0 un numero complesso, $s_0 \neq 0$. Scrivendo tale numero in forma trigonometrica si ottiene $s_0 = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0)$, con $\rho_0 \neq 0$. Ciò posto, si consideri l'equazione

$$e^z = s_0.$$

Ponendo $z = x + jy$ tale equazione allora diviene:

$$e^x(\cos y + j \sin y) = \rho_0(\cos \theta_0 + j \sin \theta_0),$$

da cui

$$x = \log \rho_0, \quad y = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Otteniamo quindi infinite soluzioni date da:

$$z = x + jy = \log |s_0| + j(\text{Arg}(s_0) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} . \quad (4)$$

Tali soluzioni hanno tutte la stessa parte reale (il logaritmo in \mathbb{R} del modulo di s_0) e differiscono nella parte immaginaria per multipli di 2π . A tale espressione si dà il nome di *logaritmo in campo complesso*.

Sottolineiamo il fatto che, come nel caso della radice, questa non è una funzione "tradizionale" in \mathbb{C} perchè assume più di un valore (precisamente assume infiniti valori).

Esempi:

1) - Risolvere l'equazione

$$e^s = 1.$$

Da (4) si ha

$$s = \log |1| + j(\text{Arg}(1) + 2k\pi) = 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z} .$$

2) - Risolvere l'equazione

$$e^s = 4j.$$

Da (4) si ha

$$s = \log |4j| + j(\text{Arg}(4j) + 2k\pi) = \log 4 + j\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} .$$

3) - Risolvere l'equazione

$$e^{1/(s-1)} = -1.$$

Ponendo

$$z = \frac{1}{s-1} \quad (5)$$

si ottiene l'equazione

$$e^z = -1$$

Da (4) si ha poi

$$z = \log |-1| + j(\text{Arg}(-1) + 2k\pi) = j(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

e quindi, in virtù di (5),

$$\frac{1}{s-1} = j(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

ossia

$$s = 1 + \frac{1}{j(\pi + 2k\pi)} = 1 - \frac{j}{(1 + 2k)\pi}, \quad k \in \mathbb{Z} .$$