APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2012-2013

Traccia delle lezioni del 8 e 11 ottobre 2012

October 11, 2012

1 Residui

Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora, come si è visto, esiste un intorno V di s_0 tale che f è analitica in $V/\{s_0\}$ e f è sviluppabile in serie di Laurent in tale intorno, ossia $\forall s \in V/\{s_0\}$ si ha

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (s - s_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds \qquad (1)$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0.

Si chiama *Residuo di f in s_0*, e si indica con $\mathrm{Res}[f, s_0]$ il numero

$$Res[f, s_0] = c_{-1}$$

dove c_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent associata, relativo al termine $(s - s_0)^{-1}$.

Da (1) ne segue allora

$$Res[f, s_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma f(s)ds.$$

Il Teorema di Cauchy, visto nelle lezioni scorse, puo' allora essere riformulato nel modo seguente:

1° Teorema dei Residui *Sia* Γ *una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia* f *analitica all'interno di* Γ *eccetto un numero FINITO di punti* $s_1, s_2, ..s_N$*. Sia infine* f *continua su* Γ*. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma f(s)ds = Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + ... + Res[f, s_N].$$

2 Formule per il calcolo dei Residui

Si ha:

s_0 sing. eliminabile $\Longrightarrow Res[f, s_0] = 0;$ (*)

s_0 polo semplice $\Longrightarrow Res[f, s_0] = \lim_{s\to s_0}(s - s_0)f(s)$

s_0 polo ordine $N > 1 \Longrightarrow Res[f, s_0] = \lim_{s\to s_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} \left[(s - s_0)^N f(s)\right]$ (**)

Si osservi che il viceversa dell'implicazione (*) puo' essere falso. Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{1}{s^3} \tag{2}$$

ha in $s = 0$ un polo del terzo ordine. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno di $s = 0$ **coincide** con (2) (ricordiamo che tale sviluppo è una serie di potenze di s, con esponente positivo o negativo), si ha $c_{-1} = 0$ e, di conseguenza, $Res[f, 0] = 0$. Alla stessa conclusione si puo' giungere utilizzando la formula (**).

Si osservi infine che se s_0 è un polo semplice per f allora necessariamente il limite

$$\lim_{s\to s_0}(s - s_0)f(s)$$

esiste finito e non nullo. Pertanto, in tal caso $Res[f, s_0] \neq 0$. Se invece s_0 è un polo di ordine $N > 1$, allora può aversi $Res[f, s_0] = 0$. Si dia un esempio in proposito.

Esempio n. 1 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{2s+1}{s(s+4)(s+1)^2} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -1$. Si ha poi che $s = 0$ è un polo semplice e $s = -1$ è un polo doppio. Pertanto

$$I_1 = Res[f, 0] + Res[f, -1]$$

e

$$Res[f, 0] = \lim_{s \to 0} s f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2s+1}{(s+4)(s+1)^2} = \frac{1}{4}$$
$$Res[f, -1] = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 f(s) \right] = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \frac{2s+1}{s(s+4)} = \frac{-4}{9}.$$

Esempio n. 2 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -2$. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = -2$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = Res[f, 0] + Res[f, -2]$$

e

$$Res[f, 0] = 0$$
$$Res[f, -2] = \lim_{s \to -2} (s+2) f(s) = \lim_{s \to -2} \frac{\sin s}{s(s+4)} = \frac{\sin 2}{4}.$$

Esempio n. 3 Calcolare ($\gamma(t) = 8e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{\sin s}{s^2 - 7s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ e $s = 7$. Entrambe sono interne a γ. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = 7$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = Res[f, 0] + Res[f, 7]$$

e

$$\begin{aligned} &Res[f, 0] = 0 \\ &Res[f, 7] = \lim_{s \to 7}(s - 7)f(s) = \lim_{s \to 7} \frac{(s - 7)\sin s}{s(s - 7)} = \frac{\sin 7}{7}. \end{aligned}$$

Esempio n. 4 Provare che ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{s}{e^{2s} - 1} ds = 0.$$

Esempio n. 5 Provare che ($\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{4}{(s - 4)^2 s} ds = 0.$$

Soluzione: le singolarità sono $s = 4$ (polo semplice); $s = 0$ (eliminabile); $s_k = 2k\pi j$, $k \neq 0$, (poli semplici); $s = \infty$ (non isolata).

3 Serie di Laurent all'infinito

Si consideri

$$I = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{e^{1/s}}{(s - 1)s} ds, \tag{3}$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Le singolarità della funzione integranda (interne a γ) sono $s = 0$ e $s = 1$. Entrambe sono, ovviamente, isolate e $s = 1$ è un polo semplice, mentre $s = 0$ è essenziale. Per calcolare il Res[f,0], e di conseguenza I, le formule viste in precedenza, non sono utilizzabili. In questo caso possiamo procedere estendendo il Teorema di Laurent all'infinito e introducendo il concetto di Residuo all'infinito. Precisamente:

Teorema di Laurent in $s = \infty$

Sia f analitica all'ESTERNO di una circonferenza di centro l'origine e raggio R (sufficientemente grande). Allora per s tale che $|s| > R$ si ha

$$f(s) = \underbrace{...\frac{d_{-k}}{s^k} + ... + \frac{d_{-1}}{s}}_{(+)} + d_0 + \underbrace{d_1 s + .. + d_k s^k + ...}_{(*)} \tag{4}$$

dove i coefficienti d_k (chiamati coefficienti di Laurent all'infinito) sono dati dalla formula

$$d_k = \frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma \frac{f(s)}{s^{k+1}} ds, \tag{5}$$

dove Γ è una circonferenza percorsa una sola volta in senso positivo, di centro l'origine e raggio $R_1 > R$.

La serie (4) prende nome di *serie di Laurent all'infinito.* Tale serie è **formalmente** analoga alla serie di Laurent in $s = 0$, ma solo formalmente. Infatti quest'ultima converge in un intorno di $s = 0$, mentre la serie di Laurent all'infinito (4) converge per $|s|$ grande.

La serie (+) in (4) si chiama *parte analitica* della serie di Laurent all'infinito e la parte (*) *parte principale*. Quindi all'infinito parte analitica e parte principale "si scambiano" (eccetto d_0).

4 Residuo all'infinito

Definizione. *Sia f* analitica per $|s|$ sufficientemente grande, i.e. per $|s| > R$. Questo fatto implica che $s = \infty$ è una singolarità isolata per f oppure un punto di regolarità. Si chiama *Residuo di f all'infinito,* e si indica con $\mathrm{Res}[f, \infty]$, il numero

$$Res[f, \infty] = -d_{-1}$$

dove d_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent all'infinito (4), relativo al termine s^{-1}.

Da (5) si ha allora

$$Res[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma f(s) ds$$

dove Γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo che contiene al proprio interno **tutte** le singolarità al finito di f .

I concetti di Residuo all'infinito e Residuo al finito presentano differenze **sostanziali**. Ad esempio $s = \infty$ puo' essere una singolarità eliminabile (oppure un punto di regolarità) ed aversi

$$Res[f, \infty] \neq 0$$

il che al finito NON puo' accadere. E' sufficiente, ad esempio, considerare la funzione

$$f(s) = \frac{5}{s} + \frac{7}{s^2}$$

per la quale si ha $Res[f, \infty] = -5 \neq 0$, eppure $s = \infty$ è uno zero per f.

Inoltre $s = \infty$ puo' essere un polo semplice ed aversi

$$Res[f, \infty] = 0$$

il che al finito NON puo' accadere. E' sufficiente considerare la funzione

$$g(s) = 4s + 8$$

per la quale si ha $Res[g, \infty] = 0$, eppure $s = \infty$ è un polo semplice per g.

2° Teorema dei Residui *Sia f analitica in tutto il piano complesso eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, ..s_N$. Allora la somma di tutti i Residui, compreso il Residuo all'infinito, è nulla, ossia*

$$Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + ... + Res[f, s_N] + Res[f, \infty] = 0.$$

5 Formule per il calcolo del Residuo all'infinito.

Per quanto visto, il Res$[f, \infty]$ è definito se e solo f è analitica per $|s|$ sufficientemente grande o, EQUIVALENTEMENTE, se e solo se $s = \infty$ è una singolarità isolata per f oppure un punto di regolarità.

Il Res$[f, \infty]$ non è pertanto definito quando $s = \infty$ è una singolarità non isolata (di accumulazione) per f.

Sia p un intero positivo. Diremo poi che $s = \infty$ *è uno zero di ordine p per f* se f è analitica per $|s|$ sufficientemente grande $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$ e

$$\lim_{s\to\infty} s^p f(s) \qquad \text{esiste finito e non nullo.} \tag{6}$$

Utilizzando la serie di Laurent all'infinito, si può provare che $s = \infty$ *è uno zero di ordine* p *per* f se e solo se lo sviluppo di Laurent all'infinito è del tipo

$$f(s) = \frac{d_{-p}}{s^p} + \frac{d_{-p-1}}{s^{p+1}} + \frac{d_{-p-2}}{s^{p+2}} + ..., \text{ con } d_{-p} \neq 0.$$

Infine si osservi che la condizione (6) è equivalente alla seguente

$$\lim_{s\to\infty} f^{(i)}(s) = 0 \text{ per } i = 0, 1, .., N-1, \qquad \lim_{s\to\infty} f^{(N)}(s) \text{ esiste finito e non nullo.}$$

Pertanto la condizione (6) implicitamente condiene anche la condizione precedente $\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$.

Teorema 1 *Sia* f *analitica per* $|s|$ *grande. Allora se* $s = \infty$ *è uno zero per* f *di ordine MAGGIORE di 1, si ha*

$$Res[f, \infty] = 0.$$

Teorema 2 *Sia* f *analitica per* $|s|$ *grande. Allora*

$$Res[f, \infty] = -Res\left[g(u), 0\right], \tag{7}$$

dove

$$g(u) = f(\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}, \tag{8}$$

Si osservi che il Teorema 2 riconduce il calcolo del residuo all'infinito al calcolo del residuo al finito (in zero) della funzione "ausiliaria"g.

6 Esercizi

♦ 1) Calcolare

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{4}{(s-4)^2 s} ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ (polo semplice) e $s = 4$ (polo doppio). Sono entrambe interne a γ e quindi, per il primo Teorema dei Residui si ha

$$I_1 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4].$$

Applicando il secondo Teorema dei Residui si ha anche

$$\text{Res}[f,0]+\text{ Res}[f,4]+\text{Res}[f,\infty]=0$$

e quindi

$$I_1 = -\text{Res}[f,\infty].$$

Poiché f ha in $s=\infty$ uno zero triplo, ne segue Res$[f,\infty]$=0 e quindi

$$I_1 = 0.$$

♦ 2) Calcolare

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{ds}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-10)},$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0,2\pi]$. Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_2 = \text{Res}[f,1]+\text{ Res}[f,2]+\text{Res}[f,3]+\text{Res}[f,4]=\text{- Res}[f,10]\text{-Res}[f,\infty].$$

Poiché la funzione integranda ha uno zero di ordine 5 in $s=\infty$, si ha Res$[f,\infty]$=0. Inoltre, essendo $s=10$ polo semplice, si ha

$$\text{Res}[f,10] = \lim_{s\to 10}\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)} = \frac{1}{3024}$$

e quindi

$$I_2 = -\frac{1}{3024}.$$

♦ 3) Calcolare

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{(s+1)\sin(1/s)}{s}ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0,2\pi]$.L'unica singolarità della funzione integranda al finito è $s=0$, che è di tipo essenziale. In $s=\infty$ la funzione integranda ha uno zero semplice. Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_3 = \text{Res}[f,0]\text{=-Res}[f,\infty].$$

Da (8) si ha

$$g(u) = \frac{1+u}{u^2}\sin u$$

e poiché $u = 0$ è un polo semplice per g, si ha

$$\mathrm{Res}[g, 0] = \lim_{u \to 0} ug(u) = \lim_{u \to 0}(1+u)\frac{\sin u}{u} = 1.$$

Applicando la formula (7) si ottiene:

$$\mathrm{Res}[f, \infty] = -1.$$

♦ 4) Calcolare i seguenti integrali lungo le curve indicate:

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{5s+1}{s^4+2}ds \qquad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{4s^8+3}{s^9+1}ds \qquad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{se^{1/s}}{(s-1)(s-3)}ds \qquad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_7 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{se^{1/S}}{(s-1)(s-3)}ds \qquad \gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione :

$$I_4 = 0, I_5 = 4, I_6 = 1, I_7 = 1 - e^{1/3}3/2.$$

♦ 5) Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire:
(i) se è applicabile il secondo Teorema dei Residui;
(ii) se esiste il residuo all'infinito e, in caso affermativo, calcolarlo.

$$f_1(s) = \frac{e^{1/s^2}}{\sin s^2}; \qquad f_2(s) = e^{1/s^2}(\sin s^2)$$

$$f_3(s) = \sin(s^2 + s^4 + 3); \qquad f_4(s) = \frac{\sin(s^2 + s^4 + 31)}{s-3}.$$

7 Alcune proprietà delle funzioni analitiche

Teorema (di Liouville). *Sia f analitica e limitata in tutto il piano complesso. Allora f è costante.*

Questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Ad esempio, la funzione reale $\sin x$ è limitata e sviluppabile in serie di potenze, ma non è costante!

Dal Teorema di Liouville si hanno poi le due seguenti conseguenze:

Corollario 1. *Sia f priva di singolarità al finito e all'infinito. Allora f è costante.*

Corollario 2 (Teorema fondamentale dell'algebra di D'Alembert) *Ogni polinomio P di grado $n \geq 1$ ha almeno uno zero in C.*

Vale infine il seguente:

Teorema *Sia f analitica in un aperto Ω, e sia f non identicamente nulla. Allora gli eventuali zeri di f in Ω sono isolati.*

Anche questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale, come illustra, ad esempio, la funzione reale

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

per la quale $x = 0$ è uno zero non isolato.

Esercizio Sia g analitica in un intorno V di s_0. Verificare che

$$g'(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{g(s)}{(s - s_0)^2} ds,$$

dove γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice chiusa, percorsa in senso positivo, contenuta in V e contenente all'interno il punto s_0.