

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2012-2013

Traccia delle lezioni del 5 e 8 novembre 2012

November 8, 2012

Dal volume M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

1 Trasformata Zeta

- La proprietà della traslazione - Cap. 3.6: Definizione 3.3 , Prop. 3.9, Esempio 3.5.
- La convoluzione discreta - Cap. 3.7 : Definizione. 3.4, Teorema 3.2, Esempio 3.6.
- Conseguenze :

Corollario 1 Se $F(z)$ è la trasformata Zeta di $\{f_n\}$, allora la trasformata Zeta di $\{\sum_{k=0}^n f_k\}$ è

$$\frac{z}{z-1}F(z).$$

Corollario 2 Se $F(z)$ $G(z)$ sono le trasformate Zeta di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$, rispettivamente, allora l'antitrasformata Zeta di $F(z)H(z)$ è la convoluzione discreta $\{f_n * g_n\}$.

- Applicazione del Corollario 2 nel calcolo dell'antitrasformata Zeta - Cap. 3.12: Esempi 3.15 e 3.16.
- Trasformata Zeta ed equazioni alle differenze : Cap. 3.1.

2 La Trasformata di Laplace nell'analisi di reti elettriche

- Introduzione (Cap. 1 - paragrafo 1.1).
- **Funzioni di classe Λ^1 - Definizione 1** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \tag{1}$$

$$2) \quad \text{esiste } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt} dt < \infty.$$

E' evidente che se $\int_0^\infty |f(t)|e^{-xt} dt < \infty$, allora $\int_0^\infty |f(t)|e^{-yt} dt < \infty$ per ogni $y > x$. Si chiama *ascissa di convergenza di f* , e si indica con α_f , il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt} dt < \infty. \right\}.$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

si ha $u(t) \in \Lambda^1$ e $\alpha_u = 0$. Per le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{5t}u(t), & f_2(t) &= tu(t), & f_3(t) &= \sin t u(t), \\ f_4(t) &= e^{-9t}u(t), & f_5(t) &= t^2u(t), & f_6(t) &= u(t) - u(t-7) \end{aligned}$$

si ha rispettivamente

$$\alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \quad \alpha_{f_4} = -9, \quad \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty.$$

Invece la funzione

$$g(t) = \begin{cases} \exp t^2 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

non appartiene a Λ^1 . Si veda inoltre il Cap. 1 - paragrafo 1.2, in cui la trasformata di Laplace è definita per funzioni di classe Λ . E' facile verificare che se $f \in \Lambda^1$, allora $f \in \Lambda$, ma in generale non vale il viceversa. Quindi la Definizione 1 data sopra risulta più generale.

- Definizione di trasformata di Laplace e sua analiticità (Cap. 1, paragrafo 1.3 e Prop. 3.1).
- Proprietà: linearità (Cap. 1 - paragrafo 1.4, Prop. 1.4), derivazione (Cap. 1 - paragrafo 1.9 Teorema 1.5), integrazione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Corollario 1.4), convoluzione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Teorema 1.7).
- Applicazioni a circuiti elettrici (Cap. 1.16)

3 Esercizi

A) Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti, determinando anche il raggio di convergenza. (Tali esercizi saranno svolti in una prossima lezione)

$$f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad : \quad F(z) = \frac{8z^2}{(z^2 - 1)^2};$$

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{3n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad : \quad F(z) = \frac{e^3}{z(1 - e^6 z^{-2})};$$

$$f_n = \begin{cases} e^{3n} & \text{se } n = 0, 5, 10, 15, 20, \dots \\ 2 & \text{se } n = 1, 6, 11, 16, 21, \dots \\ n & \text{se } n = 2, 7, 12, 17, 22, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad ; \quad f_n = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ n & \text{se } n = 3k + 1, k \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } n = 3k + 2, k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

A titolo di esempio si vedano anche gli esercizi negli Esempi 3.2, 3.3 e 3.4 e il relativo svolgimento.

B) Come evidenziato nel Teorema 3.2, il raggio di convergenza R_h della convoluzione discreta $h_n = f_n * g_n$ verifica la disuguaglianza

$$R_h \leq \max \{R_f, R_g\},$$

dove R_f e R_g sono i raggi di convergenza di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$, rispettivamente. Nel Cap. 3.7 è fornito un esempio in cui $R_h < R_f$ e $R_h < R_g$. Si costruisca un altro esempio ragionando sulle singolarità delle trasformate zeta F e G .