APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2012-2013
ESERCIZI parte 3

October 11, 2012

1 Esercizi

Esercizio 1.1 - Calcolare il seguente integrale

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$ e

$$f_1(s) = \frac{s}{(e^{1/s}-1)(s-2)^4}; \qquad f_2(s) = \frac{\sin(1/s)}{(s-1)(s-5)}; \qquad f_3(s) = \frac{s(7s+1)}{(s-1)^2(s-2)}.$$

Risposte:

$I_1 = -\text{ Res}[f_1, \infty] = 0$ in quanto $s = \infty$ è zero doppio per f_1.

$I_2 = -\text{ Res}[f_2, \infty] - \text{Res}[f_2, 5]$. Poiché $s = \infty$ è zero triplo per f_2, si ha $\text{Res}[f_2, \infty] = 0$. Pertanto

$$I_2 = -\text{ Res }[f_2, 5] = -\left.\frac{\sin(1/s)}{(s-1)}\right|_{s=5} = -\frac{\sin(1/5)}{4}$$

$I_3 = -\text{ Res}[f_3, \infty] = \text{Res}[h, 0]$, dove $h(u) = u^{-2}f_3(1/u)$,ossia

$$h(u) = \frac{(7+u)}{(1-u)^2(1-2u)u}.$$

Poiché $u = 0$ è polo semplice per h, si ottiene

$$\text{Res }[h, 0] = \left.\frac{(7+u)}{(1-u)^2(1-2u)}\right|_{u=0} = 7.$$

Esercizio 1.2 - Determinare, se esistono le funzioni analitiche F tali che

$$\text{Re } F' = x - y. \tag{1}$$

Soluzione. Chiaramente, se F è analitica, allora lo è anche F' e pertanto la funzione in (1) deve essere armonica, il che puoò essere verificato immediatamente. pertanto, per quanto visto, tali funzioni F esistono. Ricordando che

$$F'(s) = F'(x + jy) = u_x(x, y) + jv_x(x, y)$$

si ha allora

$$u_x(x, y) = x - y$$

e, dalla prima delle formule di Cauchy-Riemann anche

$$v_y(x, y) = x - y.$$

Pertanto

$$u(x, y) = \frac{x^2}{2} - xy + c(y)$$
$$v(x, y) = xy - \frac{y^2}{2} + d(x),$$

dove c [d] è una arbitraria funzione della sola variabile x [y]. Dalla seconda delle formule di Cauchy-Riemann si ottiene allora

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

ossia

$$-x + c'(y) = -y - d'(x)$$

e quindi

$$-x + d'(x) = -y - c'(y). \tag{2}$$

Pertanto le due funzioni in (2) sono costanti, ossia

$$-x + d'(x) = -y - c'(y) = k_1.$$

Da qui si ottiene allora

$$d(x) = \frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2, \quad c(y) = -\frac{y^2}{2} - k_1 y + k_3$$

e quindi

$$F(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y) =$$
$$= \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} - k_1 y + k_3 + j\left(xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2\right).$$

Poiché

$$F(x) = F(x + j0) = \frac{x^2}{2} + k_3 + j\left(\frac{x^2}{2} + k_1 x + k_2\right),$$

utilizzando il principio dell'unicità dell'estensione analitica, si ottiene

$$F(s) = \frac{s^2}{2} + k_3 + j\left(\frac{s^2}{2} + k_1 s + k_2\right). \tag{3}$$

E' immediato verificare che (3) soddisfa (1). Si osservi che F dipende da tre costanti reali, come era lecito attendersi dal momento che è stata assegnata la parte reale della derivata prima.

Allo stesso risultato si perviene anche procedendo nel modo seguente. Poniamo $F' = G$ e sia

$$A(x, y) = \operatorname{Re} G, \quad B(x, y) = \operatorname{Im} G.$$

Allora

$$A(x, y) = x - y$$

e, utilizzando il procedimento visto a lezione, si ricostruisce la funzione $G(s)$. Poiché $G(s) = F'(s)$, una integrazione fornisce le funzioni F cercate.

2 Esercizi "teorici"

Es. 1 Per le seguenti funzioni calcolare, se esiste, il residuo all'infinito

$$f_1(s) = s - |s|; \;\; f_2(s) = s - 4\exp(2s^3)$$

Es. 2 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ avente una sola singolarità al finito in $s = 0$, di tipo essenziale. Sia inoltre $s = \infty$ uno zero triplo. Quanto vale $\mathrm{Res}[f, 0]$?

Es. 3 Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Re}\, f = x^2 - y$; la funzione f è analitica?

Es. 4 Si può applicare il 2° Teor. dei Residui alle funzioni

$$f_1(s) = \frac{\sin 7s}{s^2 + 9s + 8}; \; f_2(s) = \frac{\sin 7s}{(s^2 + 9s + 8)\exp(4s)};$$
$$f_3(s) = \frac{\exp(3s)}{(s^2 + 9s + 8)(\sin 7s)} \; ?$$

Es. 5 Siano

$$F_1(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)}; \; F_2(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)(s+11)}.$$

Le funzioni F_i sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = -7$? E in $s = \infty$?

Es. 6 Sia F una funzione razionale. Sono sviluppabili in serie di Laurent all'infinito le funzioni

$$G_1(s) = F(s)/\sin s; \; G_2(s) = F(s)/\exp(5s) \; ?$$

Es. 7 Sia F una funzione razionale con $F(0) = 1$. Sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = 0$ le funzioni

$$G_1(s) = e^{1/s} F(s); \qquad G_2(s) = \frac{F(s)}{s};$$
$$G_3(s) = \frac{F(s)}{\sin(1/s)}; \qquad G_4(s) = e^{-1/s} F(s) \qquad ?$$

Es. 8 Sia f una funzione analitica in tutto il piano complesso. Quanto vale $\mathrm{Res}\,[f, \infty]$?

Es. 9 Sia f una funzione analitica all'interno della circonferenza di centro l'origine e raggio 10. Sia poi $f(s) = 6s^2 - 9s + 1$ se $s \in \gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [\pi, 3\pi/2]$. Calcolare $f(1)$ e $f(j)$.

Es. 10 Sia g analitica in un intorno V di $s = 7$ e $g'(7) = 5j$. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{g(s)}{(s-7)^2} ds$$

dove γ è una circonferenza di centro $s = 7$ contenuta in V e percorsa in senso positivo.

Es. 11 Ciascuna delle seguenti domande ha UNA E UNA SOLA RISPOSTA ESATTA. Si individui quale, giustificando la risposta.

▲ *Domanda n.1 - E' applicabile il 2º Teorema dei Residui alla funzione*

$$F(s) = \frac{2 + e^{1/s}}{\sin s} \ ?$$

a) - No, perché F ha infinite singolarità.
b) - Sì, perché F è limitata
c) - No, perché $s = 0$ è sing. essenziale
d) - Sì, perché F non è razionale.

▲ *Domanda n.2 - Sia F priva di singolarità al finito e all'infinito. Quale delle seguenti affermazioni è vera?*
a) $F(0) = 0, F(1) = 1$
b) $F(0) = 1, F(1) = 0$
c) $F(0) = F(1)$
d) $F(0) = 0, F(\infty) = 1$

▲ *Domanda n.3 - Sia F una funzione razionale propria [i.e. $F = N/D$, con N e D polinomi tali che grado N <grado D]. Sia poi $G(s) = 1/F(s)$. Allora:*
a) G ha almeno una singolarità essenziale
b) G ha almeno una singolarità polare
c) G ha almeno una singolarità non isolata
d) G è limitata.