

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2012-2013

11,13 e 20 marzo 2013

March 20, 2013

1 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in V* ogni applicazione $\|\cdot\|$

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} \|f\| \geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| & \forall f, g \in V \end{array}$$

e lo spazio V si chiama *spazio normato*.

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, T]$, ossia $V = C[0, T]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0, T]$ le seguenti ($f \in C[0, T]$):

$$\begin{aligned} \|f\|_M &= \max_{t \in [0, T]} |f(t)| \\ \|f\|_1 &= \int_0^T |f(t)| dt \\ \|f\|_2 &= \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

- Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da

$$d(f, g) = \|f - g\| \quad (f, g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0, T]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) $(f, g \in C[0, T])$:

$$d_M(f, g) = \|f - g\|_M = \max_{t \in [0, T]} |f(t) - g(t)|$$

$$d_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_0^T |f(t) - g(t)| dt$$

$$d_2(f, g) = \|f - g\|_2 = \left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1 - t)$, $g(t) = t/2$ e sia $T = 1$. Si verifichi che in $C[0, 1]$, per le distanze sopra definite si ha

$$d_M(f, g) = 1/2, \quad d_1(f, g) = 1/8.$$

2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

e tale limite è indipendente da a, b , allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =_{def} \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f , esteso a $\mathbb{R}$ non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$) e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L \rightarrow +\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \quad (2)$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4 + 1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4 + 1} dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

3 Gli spazi L^p

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$. Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$ se $|f|^p$ è integrabile (in senso

improprio) in $\mathbb{R}$ ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1$, f si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici). In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da ($f, g \in L^1(\mathbb{R})$)

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \quad d_{L^1}(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)| dt.$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da ($f, g \in L^2(\mathbb{R})$)

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}, \quad d_{L^2}(f, g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$: ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$ ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Vale il seguente:

Teorema Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Allora l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

converge se e solo se $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia se e solo se f è assolutamente integrabile sull'intero asse reale.

4 Trasformata di Fourier in L^1

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3)$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt}_{(+)}$$

(*) si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e (+) *Trasformata seno di Fourier*.

5 Antitrasformata

Vale il seguente teorema.

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L . Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4)$$

La formula (4) è detta formula dell'antitrasformata di Fourier.

Si osservi che (3) è una definizione e vale sotto la sola condizione $f \in L^1(\mathbb{R})$. La formula dell'antitrasformata (4) è invece conseguenza di un Teorema e richiede una condizione aggiuntiva, ossia che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L . Prime proprietà della trasformata di Fourier in L^1

6 Prime proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. Se f è pari, allora F è pari.
2. Se f è dispari; allora F è dispari.
3. Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.
4. Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.

Valgono anche le relazioni inverse se f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$. Precisamente:

5. Se F è pari, allora f è pari.
6. Se F è dispari; allora f è dispari.
7. Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.
8. Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.

7 Altre proprietà

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F , ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$.

Corollario. La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ può non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi

$f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è di classe C^1 e si ha:

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j \frac{d}{d\omega} F(\omega).$$

Si osservi che le due ipotesi " $f \in L^1(\mathbb{R})$ " e " $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ " sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f , data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g , data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha " $g \notin L^1(\mathbb{R})$ " e " $tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ".

Si osservi inoltre che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente.

Dal teorema precedente seguono poi i seguenti:

Corollario 1 Sia $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, \dots, N$. Allora la trasformata di Fourier F di f è una funzione di classe $C^N(\mathbb{R})$.

Corollario 2 Sia f a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. Sia f assolutamente integrabile in $[a, b]$. Allora f è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata F è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.

Si osservi che tali corollari forniscono solo condizioni sufficienti. Ad esempio la trasformata F può essere di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ anche se f non è a supporto compatto. Un esempio in tal senso è dato dall'impulso esponenziale, che sarà trattato nella prossima sezione.

8 Esempi

▲ Impulso Rettangolare - Sia

$$f_R(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_R(\omega) = 2ML \operatorname{sinc}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1} \sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

Si osservi che F_R è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_R \in C^\infty(\mathbb{R})$, ma $F_R \notin L^1(\mathbb{R})$. Quindi, in generale, in $L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier non può essere iterata.

▲ Impulso Triangolare - Sia

$$f_T(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_T(\omega) = \frac{2M(1 - \cos \omega)}{\omega^2} \text{ per } \omega \neq 0, F_T(0) = M.$$

ossia, usando le formule di duplicazione del coseno,

$$F_T(\omega) = M \left(\operatorname{sinc} \left(\frac{\omega}{2} \right) \right)^2.$$

Si osservi che F_T è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_T \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_T \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ Impulso gaussiano - Sia

$$f_G(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_G(\omega) = \sqrt{2\pi} \exp((- \omega^2/2)).$$

Anche in questo caso F_G è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_G \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_G \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ Impulso esponenziale - Sia

$$f_E(t) = \exp(-|t|);$$

ovviamente $f_E \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha con facili calcoli, utilizzando le proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ (vedi paragrafo seguente)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Pertanto la trasformata di Fourier di f_E è la funzione

$$F_E(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}.$$

Si osservi che F_E è continua, infinitesima per $|\omega| \rightarrow \infty$, $F_E \in L^1(\mathbb{R})$ e $F_E \in C^\infty(\mathbb{R})$.

9 Derivazione

Teorema (Derivazione) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Tale risultato può essere provato integrando per parti l'integrale

$$\mathfrak{F}\{f'\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt$$

e usando la proprietà:

$$f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}) \implies \lim_{|t| \rightarrow +\infty} f(t) = 0.$$

Iterando il procedimento si ha poi il seguente:

Corollario 1 Sia $f \in C^N(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, ..., $f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\mathfrak{F}\{f^{(N)}\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $f'' \in L^1(\mathbb{R})$. allora

$$\mathfrak{F}\{f''\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi " $f \in C^1(\mathbb{R})$ " nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.