

# ANALISI MATEMATICA III (ELM+TEM)

**A.A. 2012-2013**

Traccia delle lezioni del 25 e 27 marzo 2013

March 27, 2013

## 1 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in $L^2$

Vale il seguente:

**Teorema di Plancherel** - Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , Allora:

1) L'integrale (nel senso del valore principale)

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

esiste per ogni  $\omega \in \mathbb{R}$ , eccetto, al più, un insieme di misura nulla.

Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

si ha inoltre:

2)  $F \in L^2(\mathbb{R})$

3) Vale la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

4) Vale l'identità:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche **principio di conservazione della norma (o dell'energia)**.

La proprietà 1) suggerisce la seguente definizione.

**DEFINIZIONE** - Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ; si chiama *Trasformata di Fourier in  $L^2$* , la funzione  $F$  definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

OSSERVAZIONE : se inoltre  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , ossia  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , allora l'integrale in (1) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in  $L^2$  **coincide** con la trasformata di Fourier in  $L^1$ , vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a  $L^2(\mathbb{R})$  e non a  $L^1(\mathbb{R})$ , ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata in  $L^1(\mathbb{R})$  non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in  $L^1$ , vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

## 2 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in  $L^2$  :

**Teorema (Proprietà di simmetria)** Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e sia  $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$  la sua trasformata. Allora  $F \in L^2(\mathbb{R})$  e

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se  $f$  è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di  $f$  coincide con  $f$ , a meno di un fattore  $2\pi$ .

**Conseguenze:**

◆ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \operatorname{sinc}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML \operatorname{sinc}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M & \text{se } |\omega| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che tale trasformata non è continua in  $\mathbb{R}$ . Infatti  $g \notin L^1(\mathbb{R})$ !

◆ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$h(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$H(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$\varphi(t) = \frac{2}{1 + t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{\varphi(t)\} = \Phi(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Si osservi che tale trasformata non è derivabile in  $\omega = 0$  (ed infatti  $t\varphi(t) \notin L^1(\mathbb{R})$ ).

### 3 Altre proprietà della trasformata di Fourier

Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$  e sia  $F$  la sua trasformata di Fourier. Allora valgono le seguenti proprietà (si ricordi che il caso  $f \in L^1(\mathbb{R})$  è stato trattato nelle prime lezioni):

1. Se  $f$  è pari, allora  $F$  è pari e viceversa.

2. Se  $f$  è dispari, allora  $F$  è dispari e viceversa
3. Se  $f$  è reale e pari, allora  $F$  è reale e pari e viceversa.
4. Se  $f$  è reale, allora  $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ .
5. Se  $F$  è reale e pari, allora  $f$  è reale e pari.

## 4 La traslazione

**Traslazione in frequenza** - Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ . Allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\gamma t}\} = F(\omega - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

**Traslazione temporale** - Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ . Allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega} F(\omega), \quad A \in \mathbb{R}.$$

## 5 Il caso razionale

I seguenti risultati permettono di stabilire quando una funzione razionale  $f$  è trasformabile in  $L^2$  secondo Fourier e, analogamente quando una funzione razionale  $F$  è una trasformata di Fourier in  $L^2$ .

**Teorema 1** Sia  $R$  una funzione razionale, ossia

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con  $N, D$  polinomi primi tra loro. Allora :

1)  $R \in L^2(\mathbb{R})$  se e solo se  $R$  è propria e il polinomio  $D$  non ha zeri reali, ossia se e solo se

$$i) \text{ gr } D - \text{gr } N > 0 \tag{2}$$

$$ii) D(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2)  $R \in L^1(\mathbb{R})$  se e solo se

$$i) \operatorname{gr} D - \operatorname{gr} N > 1$$

$$ii) D(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema precedente si ha subito il seguente:

**Corollario** *Sia  $R$  una funzione razionale, ossia*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

*con  $N, D$  polinomi primi tra loro. Allora :*

$$R \in L^1(\mathbb{R}) \implies R \in L^2(\mathbb{R}).$$

Per quanto riguarda poi la trasformata di Fourier, vale il seguente risultato:

**Teorema 2** *Sia  $F$  una funzione razionale,*

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

*con  $N$  e  $D$  polinomi, primi tra loro. Allora  $F$  è una trasformata di Fourier se e solo se sono verificate per  $F$  le condizioni (2) . Inoltre l'antitrasformata di  $F$  appartiene sia a  $L^1(\mathbb{R})$  che a  $L^2(\mathbb{R})$ , ossia, indicata con  $f$  tale antitrasformata, si ha  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .*

Si osservi che la proprietà " $f \in L^2(\mathbb{R})$ " discende dal Teorema di Plancherel, visto la lezione scorsa, mentre la proprietà  $f \in L^1(\mathbb{R})$  sarà dimostrata nelle prossime lezioni.

Utilizzando poi la teoria delle distribuzioni, vedremo alla conclusione del corso che il Teorema 2 può essere generalizzato nel modo seguente:

**Teorema 3** *Sia  $F$  una funzione razionale, ossia*

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

con  $P, Q$  polinomi primi tra loro e  $Q(\omega) \neq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$ . Allora:

- se  $\text{gr } P < \text{gr } Q$ , allora  $F$  è trasformata di Fourier di una  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
- se  $\text{gr } P \geq \text{gr } Q$ , allora  $F$  è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

#### ESEMPIO 1

Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{5+t}{t-9}; & f_2(t) &= \frac{5+t}{t^2+9}; \\ f_3(t) &= \frac{5+t}{t^2-9}; & f_4(t) &= \frac{5+t}{(t^2+9)^2}. \end{aligned}$$

Allora  $f_1$  e  $f_3$  non sono trasformabili secondo Fourier (né in  $L^1$  né in  $L^2$ ), in quanto il denominatore ha zeri reali e quindi  $f_1$  e  $f_3$  non appartengono né a  $L^1$  né a  $L^2$ . Invece  $f_2 \in L^2$  e  $f_4$  appartiene sia in  $L^2$  che in  $L^1$ . Pertanto  $f_2$  ammette trasformata di Fourier in  $L^2$  e  $f_4$  ammette trasf. di Fourier sia in  $L^1$  che in  $L^2$  e, ovviamente, le due trasformate coincidono

#### ESEMPIO 2

Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{5\omega}{\omega-8}; & F_2(\omega) &= \frac{5\omega}{\omega^2+3\omega}; \\ F_3(\omega) &= \frac{5\omega}{\omega^2+3}; & F_4(\omega) &= \frac{5\omega^2+4}{\omega^2+8}. \end{aligned}$$

Allora  $F_1$  e  $F_2$  non appartengono a  $L^2$  (il denominatore ha zeri reali) e quindi non sono trasformate di Fourier. Invece  $F_3 \in L^2$  e quindi (vedi Teorema 2) la sua antitrasformata appartiene a  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Infine  $F_4$  è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni (vedi Teorema 3).

## 6 Calcolo della trasf. (antitrasf.) nel caso razionale

Il calcolo della trasformata (antitrasformata) di Fourier nel caso razionale può essere effettuato utilizzando la Teoria dei Residui (vista mercoledì scorso) e il seguente:

**Lemma di Jordan** - Sia  $g$  una funzione complessa razionale propria, ossia

$$g(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove  $N$  e  $D$  sono polinomi con grado  $(N) < \text{grado}(D)$ . Allora:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(s) e^{jms} ds = 0$$

se:

i)  $C_R$  è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio  $R$ , contenuta nel semipiano  $\text{Im } s > 0$  e  $m$  è un numero reale positivo (vedi figura 1);

oppure se:

ii)  $C_R$  è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio  $R$ , contenuta nel semipiano  $\text{Im } s < 0$  e  $m$  è un numero reale negativo (vedi figura 2).

Tale Lemma, insieme alla teoria dei Residui, consente di calcolare agevolmente integrali del tipo

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(u)}{D(u)} e^{ju\omega} du$$

dove  $N$  e  $D$  sono polinomi con grado  $D > \text{grado } N$  e  $D(u) \neq 0$  per **ogni**  $u$  reale. Il procedimento è stato sviluppato dettagliatamente a lezione ed altri esercizi saranno visti nelle prossime lezioni. Qui ricordiamo soltanto i due risultati finali, il primo per la trasformata e il secondo per l'antitrasformata.

**Teorema (trasformata)** - Sia  $f$  razionale,  $f(t) = N(t)/D(t)$ . Siano  $i$  polinomi  $N, D$  primi tra loro e siano verificate le condizioni

$$\begin{aligned} D(t) &\neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{gr } D - \text{gr } N &> 0 \end{aligned}$$

Allora, indicati con  $s_1, \dots, s_N$  gli zeri di  $D$ , si ha:

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

**Teorema (antitrasformata)** - Sia  $F$  razionale,  $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$ . Siano i polinomi  $P, Q$  primi tra loro e siano verificate le condizioni

$$\begin{aligned} i) & \text{ gr } P < \text{ gr } Q \\ ii) & Q(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Allora, indicati con  $s_1, \dots, s_N$  gli zeri di  $Q$ , l'antitrasformata  $f$  di  $F$  è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

dove la scrittura  $\text{Res}[H, s_i]$  indica il Residuo di  $H$  in  $s_i$ .

### Esercizio 1.

Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4}.$$

Poiché  $F$  è pari, anche la sua antitrasformata  $f$  è pari. Utilizzando il metodo visto in precedenza si ha per  $t > 0$

$$f(t) = j \text{Res}[F(s)e^{jst}, 2j]$$

da cui, con facile calcolo,

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{-2t} \text{ se } t > 0$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{2t} \text{ se } t < 0.$$

### Esercizio 2.

Calcolare le trasformate di Fourier di

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{t^2 + 1}e^{5jt}; \quad h_1(t) = \frac{1}{(t + 8)^2 + 1}; \\ h_2(t) &= \frac{1}{(t + 8)^2 + 1}e^{4jt}. \end{aligned}$$

Posto

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1},$$

la sua trasformata di Fourier è (vedi lezioni scorse)

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}. \quad (3)$$

Per esercizio, si calcoli la trasformata di  $f$  utilizzando il Teorema 1 precedente, e si verifichi il risultato (3).

Poiché  $g(t) = f(t)e^{j5t}$ , applicando la traslazione in frequenza si ottiene

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = F(\omega - 5).$$

Poiché  $h_1(t) = f(t + 8)$ , applicando la traslazione temporale si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_1(t)\} = F(\omega)e^{8j\omega}.$$

Infine, avendosi  $h_2(t) = h_1(t)e^{j4t}$ , applicando la traslazione in frequenza alla trasformata di  $h_1$  si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_2(t)\} = F(\omega - 4)e^{8j(\omega - 4)}.$$

## 7 Derivazione

Ricordiamo il Teorema della derivazione, visto la settimana scorsa.

**Teorema (Derivazione)** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R})$  e  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ . Allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Iterando tale risultato, si ha facilmente il seguente:

**Corollario** Sia  $f \in C^N(\mathbb{R})$  e  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ , ...,  $f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$ . Allora

$$\mathfrak{F}\{f^{(N)}\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f' \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $f'' \in L^1(\mathbb{R})$ , allora

$$\mathfrak{F}\{f''\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi " $f \in C^1(\mathbb{R})$ " nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

## 8 Trasformata in $L^1$

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

**Teorema** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e sia inoltre  $f$  sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso  $[-L, L]$ . Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Se  $F \in L^1(\mathbb{R})$ , allora l'integrale in (4) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se  $F \in L^1(\mathbb{R})$  la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (5)$$

Se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  può accadere che la sua trasformata  $F = \mathfrak{F}\{f\}$  non appartenga a  $L^1(\mathbb{R})$ , come illustra, ad esempio, il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio  $L^1$  non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinché la trasformata appartenga a  $L^1(\mathbb{R})$  si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

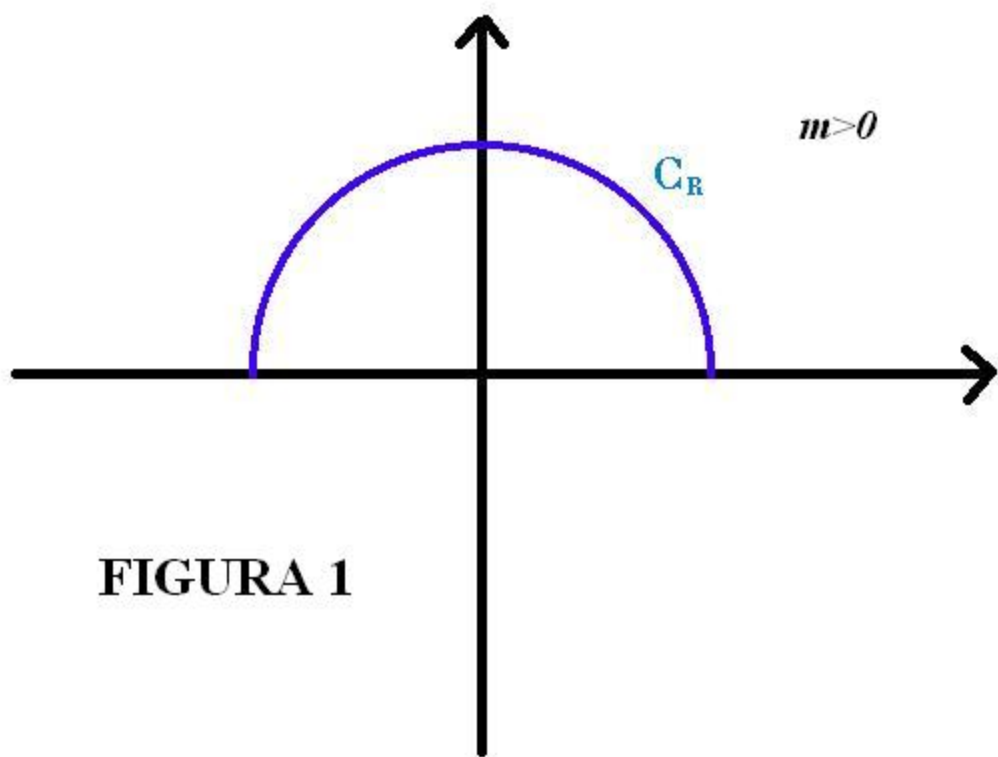
**Corollario** Sia  $f \in C^n(\mathbb{R})$ ,  $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $F = o(\omega^{-n})$  per  $|\omega| \rightarrow \infty$ , ossia

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

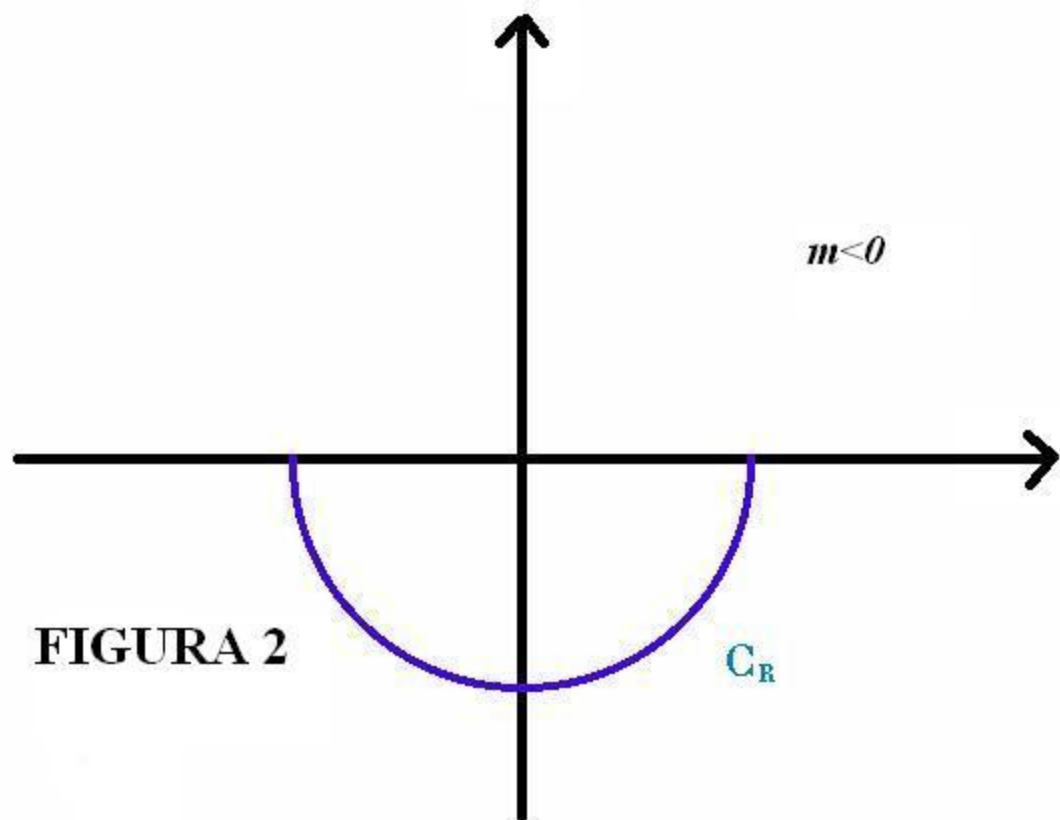
dove  $F = \mathfrak{F}\{f\}$ .

Il significato di tale Corollario è il seguente: "la trasformata di Fourier  $F$  di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tende a zero (per  $|\omega| \rightarrow +\infty$ ) tanto più velocemente, quanto più  $f$  è "liscia" (e con derivate in  $L^1(\mathbb{R})$ )"

**Corollario** Sia  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ ; allora  $F \in L^1(\mathbb{R})$  (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (4) e (5) coincidono).



**FIGURA 1**



**FIGURA 2**