

# ANALISI MATEMATICA III

## ELM+TEM

A.A. 2012-2013

Traccia della lezione del 17 aprile 2013

April 17, 2013

### 1 L'equazione di Bessel (n intero positivo)

Come detto in una precedente lezione, si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (\text{B})$$

dove  $n$  è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui  $n$  sia un intero nonnegativo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (1)$$

Le funzioni  $J_n$  sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se  $n$  è pari, allora  $J_n$  è una serie di polinomi pari;
2. se  $n$  è dispari, allora  $J_n$  è una serie di polinomi dispari;
3.  $J_0(0+) = 1$ ;  $J_n(0+) = 0$  per  $n$  intero,  $n \geq 1$ .
4. Le funzioni  $J_n$  sono funzioni oscillanti e smorzate, i.e.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x) = 0$ .

## 2 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale  $x$  e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in  $(0, \infty)$ . Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1.  $\Gamma(1) = 1$ ;
2.  $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$  ( e quindi  $\Gamma(2) = 1$ );
3.  $\Gamma(x + 2) = x(x + 1)\Gamma(x)$ ;
4.  $\Gamma(x + 3) = x(x + 1)(x + 2)\Gamma(x)$ ;
- .....
5.  $\Gamma(x + n) = x(x + 1)\dots(x + n - 1)\Gamma(x)$ ;

Ponendo in quest'ultima uguaglianza  $x = 1$ , si ottiene l'importante proprietà

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione  $\Gamma$  è nota, quando siano noti i valori che  $\Gamma$  assume in  $(0, 1]$ . Infatti se  $\Gamma$  è nota in  $(0, 1]$ , usando 2) si ottiene che  $\Gamma$  è nota anche in  $(1, 2]$ . Usando poi 3) si ottiene che  $\Gamma$  è nota anche in  $(2, 3]$ , e così via. Tale risultato puo' essere migliorato. Infatti è possibile provare che per  $x \in (0, 1/2]$  vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se  $\Gamma$  è nota in  $(0, 1/2]$ , allora  $\Gamma$  è nota anche in  $[1/2, 1)$ .

In conclusione:

*I valori della funzione  $\Gamma$  sono noti, non appena siano noti i valori che  $\Gamma$  assume in  $(0, 1/2]$ .*

Per tale motivo i valori di  $\Gamma$  vengono usualmente tabulati per  $x \in (0, 1/2]$ .

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione  $\Gamma$  anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti  $0, -1, -2, -3, \dots$ . Infatti da 2) si ha per  $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per  $x \in (-1, 0)$  si può usare tale relazione per estendere la definizione di  $\Gamma$  anche all'intervallo  $(-1, 0)$ . In altre parole si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si può procedere nell'estensione della definizione di  $\Gamma$  sul semiasse negativo. Precisamente si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)} \Gamma(x+2) && \text{se } x \in (-2, -1) \\ \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \Gamma(x+3) && \text{se } x \in (-3, -4) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione  $\Gamma$  nei punti  $x = 0, x = -1, x = -2, \dots$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{2}$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

### **3 Funzioni di Bessel (caso $n$ reale)**

Indicata con  $\Gamma$  la funzione Gamma Euleriana, per ogni  $n \in \mathbb{R}$  le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{3}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (\text{B})$$

Le funzioni  $J_n$  sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie*. Se  $n$  è intero positivo, poiché  $\Gamma(k + n + 1) = (n + k)!$ , l'espressione (3) si riduce a quella vista in precedenza.

Nel caso particolare in cui  $n$  sia un intero negativo, i primi  $n$  termini della serie (3) sono nulli, in quanto  $|\Gamma(k + n + 1)| = +\infty$ . Ad esempio, per  $J_{-7}(x)$  si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \quad (4)$$

Poiché  $|\Gamma(k-6)| = +\infty$  se  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , i primi 7 termini di (4) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da  $k = 7$ , ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

**Teorema**

- (i) Fissato  $n \in \mathbb{R}$  le funzioni  $J_n$  e  $J_{-n}$  sono entrambe soluzioni di (B).
- (ii) Se  $n$  è intero, i.e.  $n \in \mathbb{Z}$ , allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi  $J_n$  e  $J_{-n}$  sono soluzioni linearmente dipendenti.

- (iii) Se  $n$  è reale, ma non intero, i.e.  $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , allora  $J_n$  e  $J_{-n}$  sono soluzioni linearmente indipendenti.

Pertanto se  $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \quad (5)$$

dove  $c_i, i = 1, 2$  sono due opportune costanti reali.

Se  $n \in \mathbb{Z}$ , poiché  $J_n$  e  $J_{-n}$  sono soluzioni linearmente dipendenti, l'espressione (5) non fornisce tutte le soluzioni di (B). In questo caso è necessario un approccio leggermente diverso che sarà visto nella prossima lezione.