

ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2012-2013
Traccia della lezione del 22 aprile 2013

April 25, 2013

1 Funzioni di Bessel

Ricordiamo che, indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \quad (1)$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (B)$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie*. Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k+n+1) = (n+k)!$, l'espressione (1) si riduce a

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Ricordiamo inoltre che le funzioni J_n sono funzioni oscillanti. Vale il seguente:

Teorema

(i) Fissato $n \in \mathbb{R}$, le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).

(ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono linearmente dipendenti.

(iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \quad (2)$$

dove c_1, c_2 sono due arbitrarie costanti reali. Scegliendo poi in (2)

$$c_1 = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sin \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin \pi n} J_{-n}(x) \quad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \left(\frac{\cos \pi p}{\sin \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin \pi p} J_{-p}(x) \right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n , sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali. Infine si chiamano *funzioni di Hankel*, le funzioni $H_n^\pm$ date da

$$H_n^\pm(x) = J_n(x) \pm j Y_n(x),$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria. Pertanto $\operatorname{Re} H_n^\pm = J_n$ e $\operatorname{Im} H_n^\pm = \pm Y_n$.

2 Funzioni di Bessel - Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n J_n(x)) &= x^n J_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx}(x^{-n} J_n(x)) &= -x^{-n} J_{n+1}(x)\end{aligned}$$

Da tali formule si ottengono poi le cosiddette *formule di ricorrenza*:

$$\begin{aligned}x J_n'(x) &= x J_{n-1}(x) - n J_n(x) \\ x J_n'(x) &= n J_n(x) - x J_{n+1}(x) \\ 2 J_n'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2n J_n(x) &= x J_{n-1}(x) + x J_{n+1}(x).\end{aligned}$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n .

Esercizio. Provare che

$$\begin{aligned}\text{i)} \quad J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ \text{ii)} \quad J_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.\end{aligned}$$

Proviamo (i). Dalla definizione di $J_{1/2}$ si ottiene

$$\begin{aligned}J_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(3/2)} (x/2)^{1/2} - \frac{1}{1! \Gamma(5/2)} (x/2)^{5/2} + \frac{1}{2! \Gamma(7/2)} (x/2)^{9/2} + \dots\end{aligned}\tag{3}$$

Usando le relazioni $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, viste nelle scorse lezioni,

si ottiene

$$\begin{aligned}\Gamma(3/2) &= \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = (1/2)\sqrt{\pi} \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = (1/2)(3/2)\sqrt{\pi} \\ \Gamma(7/2) &= \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = (1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi} \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

e quindi, sostituendo in (3)

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!(1/2)(3/2)\sqrt{\pi}} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!(1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi}} + \dots\dots$$

da cui

$$\begin{aligned}J_{1/2}(x) &= \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \dots\dots \right) = \\ &= \frac{1}{x} \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots\dots \right) = \\ &= \frac{1}{x} \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \sin x\end{aligned}$$

e l'asserto segue osservando che

$$\frac{1}{x} \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$