

ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2012-2013
Traccia della lezione del 29 aprile 2013

May 3, 2013

1 Le distribuzioni - Definizione

Indichiamo con L^1_{loc} lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni compatto di } \mathbb{R}\};$$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio. [Il caso in cui f assuma valori in \mathbb{C} , ossia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, può essere trattato in modo simile]

Ricordiamo che una funzione $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso) $[a, b]$ dell'asse reale tale che $\varphi(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. L'intervallo $[a, b]$, all'esterno del quale φ è nulla, si chiama *supporto di* φ . E' evidente che la funzione φ è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da φ sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale D formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione φ considerata. Ad esempio la funzione α data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-1, 1]$. Analogamente la funzione β data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a D ed il suo supporto è $[-2, 2]$.

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su D . Tale spazio si indica con il simbolo \mathfrak{D} ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :

- 1) T è un funzionale, i.e. $T : D \rightarrow \mathbb{R}$
- 2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

- 3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

2 Esempi

Sono elementi di \mathfrak{D} (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove φ indica una generica funzione di D):

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin t \varphi(t) dt$
2. $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^3 \varphi(t) dt$
3. $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^t \varphi(t) dt.$

In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di \mathfrak{D} i funzionali del tipo

4. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt,$

dove φ indica, come prima, una generica funzione di D .

Altre distribuzioni (i.e. elementi di \mathfrak{D}) sono poi i funzionali

5. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

6. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D .

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t), \delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_{\sin t}(\varphi)$, assunto dal funzionale T , viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle.$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet*; e la scrittura $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra sin t e φ* .

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1. $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \sin t \varphi(t) dt$

2. $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} t^3 \varphi(t) dt$

3. $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} e^t \varphi(t) dt.$

4. Per ogni $f \in L^1_{loc}$ fissata

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt. \quad (1)$$

Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

5.

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6.

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

3 Le distribuzioni come estensione dello spazio

$$L^1_{loc}$$

Mostriamo che lo spazio \mathfrak{D} è una estensione dello spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

Ricordiamo che in tale spazio due funzioni f, g , coincidono in L^1_{loc} se

$$f(t) = g(t), \quad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

Teorema - Siano $f, g \in L^1_{loc}$. Se

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \quad (2)$$

(ossia, usando la notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle g(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in D) \quad (3)$$

allora f e g coincidono in L^1_{loc} . Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se f e g coincidono in L^1_{loc} , allora (2) [i.e.(3)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc} , ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$ il cui crochet è dato da (1) sono "tante quanti gli elementi di L^1_{loc} ".

In altre parole, se indichiamo con \mathfrak{D}^* il sottoinsieme di \mathfrak{D} formato da tutte le distribuzioni "definite tramite funzioni di L^1_{loc} ", ossia il cui crochet è dato da (1), i.e.

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente, il sottospazio \mathfrak{D}^* è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc} , ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni \mathfrak{D} può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc} .

In altre parole, ogni $f \in L_{loc}^1$ può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1)). Nella prossima lezione proveremo che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L_{loc}^1 , e quindi che non appartengono a \mathfrak{D}^*

Pertanto si ha

$$L_{loc}^1 \sim \mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}$$

i.e. \mathfrak{D}^* è strettamente contenuto in \mathfrak{D} , in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di \mathfrak{D}^* .

4 Appendice

4.1 Convergenza nello spazio delle funzioni test

La nozione di convergenza nello spazio D delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione $\{\varphi_n\}$ converge a φ se:

- 1) $\varphi_n, \varphi \in D$;
- 2) esiste un intervallo limitato e chiuso $I = [a, b]$ tale che $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$ se $t \notin I$;
- 3) la successione $\{\varphi_n^{(i)}\}$ converge uniformemente a $\varphi^{(i)}$ in \mathbb{R} per $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

ossia fissato $\varepsilon > 0$ e fissato $i = 0, 1, 2, \dots \exists n(\varepsilon, i)$ (**indipendente da t**) tale che per ogni $n > n(\varepsilon, i)$ si ha $|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi^{(i)}(t)| < \varepsilon \forall t \in I$.

4.2 Funzionale

Sia V uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in V* ogni funzione F definita in V e a valori in \mathbb{R} , i.e.

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ad esempio se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$, sono funzionali in V i seguenti (dove $x = x(t)$ indica una generica funzione continua in $[0, 1]$):

$$F_1(x) = \int_0^1 x(s) ds$$

$$F_2(x) = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$$

$$F_3(x) = 437x(0) + 567x(1)$$

Tale funzionale poi è lineare se è verificata la relazione

$$F(cx_1 + dx_2) = cF(x_1) + dF(x_2), \quad \forall c, d \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in V.$$