ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2012-2013
traccia delle lezioni del 8 e 10 aprile 2013

April 10, 2013

1 La funzione integrale e la convoluzione per la trasf. di Fourier

■ **Integrazione -**

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha il

Corollario *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha*

$$\lim_{\omega \to 0} F(\omega) = 0.$$

■ **Convoluzione -**

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama *prodotto di convoluzione di f e g,* e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (1)$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà:

$$\begin{array}{ccc} \text{commutativa} & : & f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \\ \text{associativa} & : & (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \\ \text{distributiva} & : & (f_1 + f_2) * f_3 = (f_1 * f_3) + (f_2 * f_3) \end{array}$$

Tali proprietà, caratteristiche dell'usuale prodotto, giustificano il nome di prodotto di convoluzione dato a (1). Vale il seguente:

Teorema *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}, G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, si ha*

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

Come vedremo nelle prossime lezioni, il prodotto di convoluzione interviene nella risolubilità di equazioni (o sistemi) differenziali lineari a coefficienti costanti.

2 Ancora sul caso razionale

Nel caso razionale, utilizzando la teoria delle distribuzioni, i risultati provati in precedenza possono essere generalizzati nel modo seguente:

Teorema *Sia F una funzione razionale, ossia*

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

con P, Q polinomi primi tra loro. Allora F è una trasformata di Fourier se e solo se $Q(\omega) \neq 0 \ \forall \omega \in \mathbb{R}$. Precisamente:

- se gr $P <$ gr Q , allora F è trasformata di Fourier di una $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;

- se gr $P \geq$ gr Q, allora F è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

ESEMPIO

Si considerino le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{5\omega}{\omega - 8}; \quad F_2(\omega) = \frac{5\omega}{\omega^2 + 3\omega};$$
$$F_3(t) = \frac{5\omega}{\omega^2 + 3}; \quad F_4(\omega) = \frac{5\omega^2 + 4}{\omega^2 + 8}.$$

Allora F_1 e F_2 non appartengono a L^2 (il denominatore ha zeri reali) e quindi non sono trasformate di Fourier. Invece $F_3 \in L^2$ e quindi la sua antitrasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Infine F_4 è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

3 Trasformata di Laplace

Come si è visto, sono trasformabili secondo Fourier le funzioni appartenenti agli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. Tali spazi tuttavia non sono sufficientementi "ampi" per poter applicare questo algoritmo alle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Ad esempio, come è noto, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

sono una combinazione lineare delle funzioni

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{5t}$$

e le due funzioni e^t, e^{5t} non appartegono né a $L^1(\mathbb{R})$, né a $L^2(\mathbb{R})$. Nasce quindi il problema di come sia possibile applicare l'algoritmo della trasformata a funzioni la cui crescita (per $t \to +\infty$) sia di tipo "esponenziale". La Trasformata di Laplace fornisce una risposta in tal senso. Alla fine del corso, vedremo un'altra possibilità di "estensione" della trasformata di Fourier, e quest'ultima estensione costituisce, come vedremo, un **effettivo** ampliamento degli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

3.1 Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$\begin{gathered} 1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ 2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{2}$$

E' evidente che se $f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > x_0$. Si chiama *ascissa di convergenza di* f, e si indica con α_f, il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\} .$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

per le funzioni

$$\begin{aligned} &f_1(t) = e^{5t}u(t), \quad f_2(t) = tu(t), \quad f_3(t) = \sin t\ u(t), \\ &f_4(t) = e^{-9t}u(t), \quad f_5(t) = u(t), \quad f_6(t) = u(t) - u(t-7) \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} &\alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \\ &\alpha_{f_4} = -9, \ \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty. \end{aligned}$$

Pertanto l'ascissa di convergenza può anche valere $-\infty$. Si osservi poi che la funzione $f(t) = e^{t^2}u(t)$ non appartiene a Λ^1.

Ciò premesso, si ha la seguente

Definizione. *Sia $f \in \Lambda^1$ e sia α_f la sua ascissa di convergenza . Si chiama trasformata di Laplace di f, e si indica con $L[f]$, la trasformata di Fourier di $f(t)e^{-xt}$, dove $x > \alpha_f$, ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{f(t)e^{-xt}\right\}. \tag{3}$$

Utilizzando la definizione di trasformata di Fourier si ottiene facilmente

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s = x(> \alpha_f)$.

Per complementi sulla trasformata di Laplace, e per la sua definizione, si veda anche Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3.2 Formula di Bromwich-Mellin

Vale la seguente:

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia* $f \in \Lambda^1$. *Sia inoltre* f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$. *Indicata con* $F(s) = L[f(t)]$ *la sua trasformata di Laplace, si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{L \to +\infty} \int_{x-jL}^{x+jL} F(s)e^{st} ds \tag{4}$$

dove $x = \operatorname{Re} s > \alpha_f$

La formula (4), nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, può essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (3). L'ipotesi "f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$" (o equivalentemente "f *sviluppabile in serie di Fourier in* $[-L, L], \forall L > 0$") serve per poter applicare la formula di inversione della trasformata di Fourier. Si osservi che, per il Teorema di Plancherel, tale ipotesi può essere omessa quando $f(t)e^{-xt} \in L^2[0, \infty)$.

Utilizzando il Lemma di Jordan, in una forma leggermente più generale di quella ricordata nelle scorse lezioni, è possibile mostrare che il secondo membro in (4) è indipendente dalla scelta di x, purché sia $x > \alpha_f$. Si osservi poi che l'integrale in (4) può essere inteso come il valore principale di un integrale calcolato, nel piano complesso, lungo la retta Re $s = x$. Pertanto (4) può essere scritta anche nella forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s)e^{st} ds.$$

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente risultato, la cui seconda parte sarà provata in seguito:

Teorema 3 *Sia* F *razionale,* $F(s) = N(s)/D(s)$.

- *Se gr* $D >$ *gr* N *allora esiste* $f \in \Lambda^1$ *tale che* $F(s) = L[f(t)]$.
- *Se gr* $D \leq$ *gr* N. *allora* F *è la trasformata di Laplace di una distribuzione.*

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema 4 *Sia F razionale propria, $F(s) = N(s)/D(s)$ con N, D polinomi primi tra loro con gr $N <$gr D. Allora l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ è data, per $t > 0$, dalla funzione*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano TUTTI gli zeri del polinomio D, i.e. le singolarità di F.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

4 Proprietà della trasformata di Laplace

Ricordiamo le principali proprietà della trasformata di Laplace, che intervengono nella risolubilita' di equazioni differenziali e integro-differenziali a coefficienti costanti

- **Linearità**

  Siano $f_1, f_2 \in \Lambda^1$ e siano c_1, c_2 due costanti (reali o complesse). Allora:

  $$L[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2].$$

- **Derivazione**

  Sia $f \in C^1[0, \infty)$ e sia $f, f' \in \Lambda^1$. Allora $f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t)$ esiste finito e

  $$L[f\,'] = sL[f] - f(0+).$$

- Sia $f \in C^2[0, \infty)$ e sia $f, f', f\,'' \in \Lambda^1$. Allora $f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t)$ e $f\,'(0+) = \lim_{t \to 0+} f\,'(t)$ esistono finiti e

  $$L[f\,''] = s^2 L[f] - s\ f(0+) - f\,'(0+).$$

- Sia $f \in C^N[0,\infty)$ e sia $f, f', .., f^{(N)} \in \Lambda^1$. Allora $f^{(i)}(0+) = \lim_{t\to 0+} f^{(i)}(t)$, $i = 0, 1, ...N$ esistono finiti e

  $$L[f^{\,(N)}] = s^N L[f] - \left(s^{N-1}\ f(0+) + s^{N-2} f^{\,\prime}(0+) + ...f^{\,(N-1)}(0+)\right).$$

- **Integrazione**

  Sia $f \in \Lambda^1$ e sia $g(t) = \int_0^t f(r)dr \in \Lambda^1$. Allora:

  $$L\left[g(t)\right] = \frac{L[f]}{s}.$$

- **Convoluzione**

  Sia $f, g \in \Lambda^1$. Poiché f e g sono nulle per $t < 0$, il prodotto di convoluzione $f * g$ assume la forma

  $$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

  e si ha

  $$L[f * g] = L[f]\ L[g].$$

  In altre parole, sia $f, g \in \Lambda^1$; posto $L[f] = F(s)$, $L[g] = G(s)$ si ha

  $$f * g = L^{-1}(F(s)\ G(s)),$$

  dove il simbolo L^{-1} indica l'antitrasformata di Laplace.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.9, 1.10, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

5 Equazioni differenziali lineari e trasformata di Laplace

Si consideri la seguente equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y'' + ay' + by = g(t) \tag{5}$$

dove $g \in \Lambda^1$. Vogliamo trovare la soluzione y di (5) che verifica le condizioni iniziali

$$y(0) = A, y'(0) = B.$$

Essendo $g \in \Lambda^1$, è possibile provare che tutte le soluzioni di (5) sono (per $t \geq 0$) funzioni di classe Λ^1. Quindi, per la risoluzione di (5) possiamo utilizzare il metodo della trasformata di Laplace. Usando la linearità si ottiene

$$L[y''] + aL[y'] + bL[y] = L[g],$$

da cui, per il Teorema di derivazione, si ha

$$s^2 L[y] - As - B + a(sL[y] - A) + bL[y] = L[g]$$

ossia

$$L[y] = \underbrace{\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}}_{(\#)} + \underbrace{\frac{1}{s^2 + as + b}}_{(*)} L[g]$$

Le funzioni (#) e (*) sono funzioni razionali proprie ed allora è possibile calcolare la loro antitrasformata utilizzando il Teorema visto in precedenza. Indicate con f e h tali antitrasformate, ossia

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{As + B + aA}{s^2 + as + b}\right)$$
$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + as + b}\right),$$

applicando la proprietà di convoluzione si ottiene per $t \geq 0$

$$y(t) = f(t) + (h * g)(t).$$

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

6 Equazioni differenziali lineari del 2 ordine: l'oscillazione

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x) \tag{6}$$

dove le funzioni a, b, g sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale del tipo $(\overline{x}, +\infty)$ oppure $[\overline{x}, \infty)$. Non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $\overline{x} = -\infty$.

Se g è la funzione identicamente nulla, allora (6) diviene

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{7}$$

e prende nome di equazione omogenea. Se g non è la funzione identicamente nulla, allora (6) si dice nonomogenea o affine.

Valgono le seguenti proprietà::

1. *Per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ esiste un'unica soluzione $y = y(x)$ di (6) tale che $y(x_0) = c_1$, $y'(x_0) = c_2$.*

2. *Ogni soluzione di (6) è persistente, ossia è definita in tutto l'intervallo I.*

3. *Nel caso omogeneo, l'insieme delle soluzioni di (7) è uno spazio lineare di dimensione* 2 *. Nel caso nonomogeneo, ogni soluzione y di (6) si ottiene sommando una generica soluzione y_0 dell'equazione omogenea associata (7) con una soluzione particolare $\overline{y}$ dell'equazione (6). In altri termini si ha*
$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t).$$

Se le funzioni a e b sono costanti, allora (6) diviene un'equazione "a coefficienti costanti", la cui risolubilità è stata trattata nei corsi di Analisi e può essere affrontata, come si è visto in precedenza, anche utilizzando la trasformata di Laplace. Esistono tuttavia nelle applicazioni vari casi in cui il modello matematico è rappresentato da un'equazione tipo (6) o (7) con a e/o b non a coefficienti costanti. Un primo esempio è l'**equazione di Schrödinger monodimensionale**

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{8}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, $h =$ costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (8) è di tipo (7) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

Un altro esempio è l'**equazione di Bessel,** ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{9}$$

dove n è un parametro reale. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione).

Definizione - Sia y una soluzione di (7), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (7) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (7) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$).

Vale il seguente:

Teorema (di Sturm) - *Tutte le soluzioni non banali di (7) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione di tipo (7) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (7) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Un criterio di oscillazione è il seguente:

Teorema di Leigthon

I) Sia $b(x) \geq 0$ per ogni x grande e sia A una primitiva di a,ossia

$$A'(x) = a(x).$$

(i) L'equazione (7) è oscillante se

$$\int^{\infty} e^{-A(x)}dx = \int^{\infty} e^{A(x)}b(x)dx = +\infty.$$

(ii) L'equazione (7) è nonoscillante se

$$\int^{\infty} e^{-A(x)}dx < +\infty, \qquad \int^{\infty} e^{A(x)}b(x)dx. < +\infty$$

II) Sia $b(x) \leq 0$ per ogni x grande. Allora l'equazione (7) è nonoscillante.

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente che l'equazione

$$y'' + \frac{1}{x}y = 0. \tag{10}$$

(10) è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2+1}{4x^2+4}y = 0$$

e l'equazione di Bessel sopra introdotta

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \qquad x \in (0, +\infty)$$

Invece è nonoscillante l'equazione

$$y'' + \frac{1-2x^2}{4x^2+4}y = 0.$$