# ANALISI MATEMATICA III
# ELM+TEM
# A.A. 2012-2013
Traccia delle lezioni del 6 e 8 maggio 2013

May 8, 2013

## 1 Le distribuzioni come estensione dello spazio $L^1_{loc}$

Ricordiamo quanto visto nella lezione precedente. Si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su $D$, dove $D$ si chiama spazio delle funzioni test ed è definito da

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Lo spazio delle distribuzioni si indica con il simbolo $\mathfrak{D}$ ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathfrak{D}$ se :
1) $T$ è un funzionale, i.e. $T : D \to \mathbb{R}$
2) $T$ è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

3) $T$ è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

In generale, **fissata** una funzione $f \in L^1_{loc}$, sono elementi di $\mathfrak{D}$ i funzionali del tipo

1. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt$, ove $\varphi$ indica una generica funzione di $D$.
Altre distribuzioni (i.e. elementi di $\mathfrak{D}$) sono poi i funzionali
2. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$
3. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$
dove $a$ è un generico numero reale e $\varphi$ è una generica funzione di $D$.
Usualmente i funzionali $\Delta_0, \Delta_a$ vengono indicati con i simboli $\delta(t)$, $\delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_f(\varphi)$, assunto dal funzionale $T$, viene indicato con

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle \, .$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet;* e la scrittura $\langle f(t), \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra* $f$ *e* $\varphi$.

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., si indicano anche con i simboli

1. Per ogni $f \in L^1_{loc}$ fissata

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt. \tag{1}$$

Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

2.

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

3.

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

Nella lezione scorsa si è visto che ogni funzione appartenente allo spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\} \, .$$

può essere vista come distribuzione. In altre parole, se indichiamo con $\mathfrak{D}^*$ il sottoinsieme di $\mathfrak{D}$ formato da tutte le distribuzioni il cui crochet è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} \ : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \qquad \forall \varphi \in D \right\},$$

si è visto che il sottospazio $\mathfrak{D}^*$ è in corrispondenza biunivoca con $L^1_{loc}$, ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Pertanto le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di $L^1_{loc}$, ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}^*$ (i.e. quelle il cui crochet è dato da (1)) sono *"tante quanti gli elementi di $L^1_{loc}$".*

Quindi lo spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}$ può essere interpretato come una estensione di $L^1_{loc}$.

Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di $L^1_{loc}$, e quindi che **non** appartengono a $\mathfrak{D}^*$ (vedi Appendice).

Pertanto si ha

$$L^1_{loc} \sim \mathfrak{D}^* \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}$$

i.e. $\mathfrak{D}^*$ è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$, in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni $\delta(t), \delta(t-a)$, prima considerate, non sono elementi di $\mathfrak{D}^*$.

# 2 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni, in particolare quelle che non "provengono" da funzioni di $L^1_{loc}$, è utile introdurre in $\mathfrak{D}$ una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni $\{T_n\}$ converge in $\mathfrak{D}$ ad una distribuzione $T$ se la successione numerica $\{T_n(\varphi)\}$ converge a $T(\varphi)$ per ogni $\varphi \in D$*; ossia

$$\{T_n\} \overset{\mathsf{D}}{\to} T \qquad \text{se} \qquad \{T_n(\varphi)\} \overset{\mathbb{R}}{\to} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \overset{(*)}{=} T \qquad \text{se} \qquad \lim_n T_n(\varphi) \overset{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \qquad \forall \varphi \in D.$$

dove il simbolo (*) significa che il limite è effettuato in $\mathfrak{D}$. Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

**Teorema -** *Ogni distribuzione è limite (in $\mathfrak{D}$) di una successione di elementi di $L^1_{loc}$, ossia*

$$\overline{L^1_{loc}} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in $L^1_{loc}$, che converge in $\mathfrak{D}$ (nel senso sopra specificato) alla distribuzione $T$.

Ad esempio, nel corso della lezione si è provato che la distribuzione $\delta(t)$ è il limite (in $\mathfrak{D}$) della successione $\{k_n(t)\}$ , dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la successione $\{k_n(t)\}$ converge, **nel senso delle distribuzioni,** alla distribuzione $\delta(t)$, i.e.:

$$\delta(t) \overset{(*)}{=} \lim_n k_n(t)$$

dove $(*)$ significa, come appena detto, che il limite è effettuato in $\mathfrak{D}$.

# 3 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f\,' \in L^1_{loc}$ e quindi $f\,'$ può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f\,'(t), \varphi(t)\rangle = \int_{\mathbb{R}} f\,'(t)\ \varphi(t)\ dt.$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f\,'(t)\ \varphi(t)\ dt = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi'(t)\ dt = -\langle f(t), \varphi'(t)\rangle\,;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \langle f\,'(t), \varphi(t)\rangle = -\langle f(t), \varphi'(t)\rangle\,.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

**Definizione -** Sia $T$ una distribuzione; si chiama *derivata di* $T$ (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $DT$, la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t)\rangle =_{\text{def}} -\langle T, \varphi'(t)\rangle\,,\ \forall\varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- Se $f \in C^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow f\,' \equiv Df$

- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

  si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

- $D[u(t) - u(t-a)] = \delta(t) - \delta(t-a)$.

- **Teorema -** *Se* $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ *e* $f,\ f\,' \in L^1_{loc}$*, allora*

$$f(t_0+) = \lim_{t \to t_0+} f(t), \qquad f(t_0-) = \lim_{t \to t_0-} f(t),$$

  *esistono finiti e si ha*

$$Df = f\,'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

  Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

  si ha

$$Df = f\,'(t) + 5\delta(t).$$

  Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui $f$ sia derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$, eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\begin{gathered} \langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0),\ \forall \varphi \in D \\ \langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0),\ \forall \varphi \in D \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0),\ \forall \varphi \in D. \end{gathered}$$

  In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t-a)$.

# 4 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio $L^1_{loc}$ il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a $L^1_{loc}$, ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f\ g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f\ g, \varphi \rangle = \langle f, g\ \varphi \rangle \,, \qquad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

**Definizione** - Sia $T$ una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T\ g$ la distribuzione definita da

$$\langle T\ g, \varphi \rangle = \langle T, g\ \varphi \rangle \,, \qquad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2+4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t\delta(t-\frac{\pi}{2}) &= \delta(t-\frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3+5t)\delta'(t-1)] &= -5\delta'(t-1) + 8\delta''(t-1) \\ (t-1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t-2) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t-2)]$.

# 5 Appendice

## 5.1 Lo spazio delle distribuzioni è un effettivo ampliamento di $L^1_{loc}$

Proviamo che

$$\mathfrak{D}^* \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}.$$

A tal fine è sufficiente mostrare che la distribuzione $\delta(t)$ data da

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0) \tag{2}$$

**non** appartiene a $\mathfrak{D}^*$. Per assurdo, sia $\delta(t) \in \mathfrak{D}^*$. Allora esiste $f \in L^1_{loc}$ tale che

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \ \text{ per } \textbf{ogni } \varphi \in D. \tag{3}$$

Poiché $f \in L^1_{loc}$ , la (3) diviene

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \qquad \forall \varphi \in D$$

ossia, per (2)

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\ \varphi(t)\ dt = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in D. \tag{4}$$

Poiché (4) vale $\forall \varphi \in D$, (4) vale in particolare per le funzioni $\varphi_n$ così definite:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} e\ e^{-1/(1-n^2t^2)} & \text{se } |t| < 1/n \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} . \tag{5}$$

Si osservi che tutte le funzioni $\varphi_n$ appartengono a $D$ e inoltre

$$\varphi_n(0) = 1, \qquad\qquad 0 \leq \varphi_n(t) \leq 1.$$

Allora la (4) per le funzioni $\varphi_n$ diviene

$$\int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt = 1. \tag{6}$$

Mostriamo che tale uguaglianza è assurda. Infatti si ha

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)|\ \varphi_n(t)\ dt$$

da cui, poiché $0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$,

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)|\ dt. \tag{7}$$

Passando al limite per $n \to \infty$ si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)|\ dt = 0,$$

in quanto l'ampiezza dell'intervallo di integrazione tende a zero e $f \in L^1_{loc}$. Allora da (7) si ha

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t)\ \varphi_n(t)\ dt \right| = 0.$$

Pertanto il primo membro di (6) può essere reso piccolo a piacere e quindi **NON** può essere uguale a 1.