ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2012-2013
Tracce delle lezioni del 13 e 15 maggio 2013

May 15, 2013

1 Distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty, \ j, k = 0, 1, 2, ... \right\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida.* Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \to \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t. Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$appartiene a S.

Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \underset{\neq}{\subset} S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S. Tale spazio si indica con il simbolo $\Im$, ossia

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \underset{\neq}{\subset} S,$$

si ha allora

$$\Im \subset \mathfrak{D},$$

ossia $\Im$ è un sottospazio di $\mathfrak{D}$. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio $\Im$ si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che lo spazio delle distribuzioni temperate è strettamente contenuto in $\mathfrak{D}$. Infatti le funzioni

$$e^t, \;\; e^{-t}, \;\; \sinh t, \;\; \cosh t. \; e^t u(t), \;\; e^{-t}u(-t),$$

pur essendo funzioni in L^1_{loc}, e quindi distribuzioni, ossia elementi di $\mathfrak{D}$, **non** sono distribuzioni temperate. Pertanto lo spazio delle distribuzioni temperate è un sottospazio proprio dello spazio delle distribuzioni, ossia

$$\Im \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D}.$$

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di $\Im$):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);
2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e a crescita lenta, ossia tali che $\exists \; M, q \geq 0 :$ $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;
3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;
4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;
5. se $T \in \Im$ allora $DT \in \Im$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$.

Si osservi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

Esercizio: stabilire quali delle seguenti funzioni in L^1_{loc} sono distribuzioni temperate

$$f_1(t) = e^t u(t); \quad f_2(t) = e^{-t}u(t)$$
$$f_3(t) = e^t u(-t): \quad f_4(t) = e^{-t}u(-t).$$

Esercizio: Le funzioni a crescita lenta sono distribuzioni temperate, ma esistono anche distribuzioni temperate la cui crescita non e' "lenta", in senso stretto. Ad esempio si provi che la funzione di L^1_{loc}

$$f(t) = e^t \cos(e^t)$$

è una distribuzione temperata. Suggerimento: si osservi che f è la derivata della funzione a crescita lenta $g(t) = sen(e^t)$.......

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Sia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida, si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier, ossia $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \ \forall\varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \Phi \rangle, \ \forall\varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi \rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\} \rangle, \ \forall \varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per gli elementi che **non** appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

3 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate "elementari"

La seguente tabella, provata a lezione, fornisce la trasformata di Fourier, nel senso delle distribuzioni, di alcune funzioni"elementari" a crescita lenta ($A \in \mathbb{R}$):

funzione $\rightarrow$	trasformata	
1	$2\pi\delta(\omega)$	
t	$2\pi j\delta'(\omega)$	
t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$	
e^{jAt}	$2\pi\delta(\omega - A)$,	$A \in \mathbb{R}$
$\sin(At)$	$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)]$,	$A \in \mathbb{R}$
$\cos(At)$	$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)]$,	$A \in \mathbb{R}$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\mathcal{F}_D\{\delta(t)\} = 1$$
$$\mathcal{F}_D\{\delta(t - a)\} = e^{-ja\omega}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Vale infine la proprietà

$$\text{Se } T \text{ è una distr. temperata, allora} \\ \mathcal{F}_D\left\{DT\right\} = j\omega\mathcal{F}_D\left\{T\right\}. \tag{1}$$

Esercizio: Utilizzando i crochets, provare (1).
Esercizio: Calcolare la Trasformata di Fourier delle distribuzioni

$$T_1 = \sin(t+1)\delta(t);\; T_2 = t\delta'(t-1);\; T_3 = D(e^{t-3}\delta(t));$$
$$T_4 = D(e^t\delta(t-3));\; T_5 = e^{t-3}\delta'(t); T_6 = e^{5t}\delta'(t-1) + \delta'(t-2).$$