

# ANALISI MATEMATICA III

## ELM+TEM

A.A. 2012-2013

Tracce delle lezioni del 20 e 22 maggio 2013

May 22, 2013

## 1 Trasformata di Laplace di distribuzioni

Prima di introdurre la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni, poniamo le seguenti definizioni.

**Definizione 1** - Sia  $T$  una distribuzione, ossia  $T \in \mathfrak{D}$ . Allora  $T$  si dice *nulla in un intervallo*  $(a, b)$  se

$$\langle T, \varphi(t) \rangle = 0$$

per ogni  $\varphi \in D$  e avente supporto contenuto in  $(a, b)$ .

**Definizione 2** - Sia  $T$  una distribuzione, ossia  $T \in \mathfrak{D}$ . Si chiama *insieme nullo* di  $T$ , e si indica con  $N_T$ , l'unione di tutti gli intervalli aperti  $(a, b)$  in cui  $T$  è nulla. Il suo complementare in  $\mathbb{R}$  si chiama poi *supporto* di  $T$ .

Poiché  $N_T$  è unione (infinita) di aperti,  $N_T$  è un insieme aperto di  $\mathbb{R}$ . Il supporto di  $T$ , essendo il complementare di un aperto è allora un insieme chiuso di  $\mathbb{R}$ .

Esempi

1. Sia  $f$  la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 4 & \text{se } t \in [-\pi, \pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  e quindi  $f$  è una distribuzione. L'insieme nullo  $N_f$  è

$$N_f = (-\infty, -\pi) \cup (\pi, +\infty)$$

e, di conseguenza, il supporto di  $f$  è  $[-\pi, \pi]$  (come ovviamente era lecito attendersi).

2. Sia  $f$  la funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  e quindi  $f$  è una distribuzione. L'insieme nullo  $N_f$  è

$$N_f = (-\infty, 0)$$

e, di conseguenza, il supporto di  $f$  è  $[0, +\infty)$  (come ovviamente era lecito attendersi).

3. Per la distribuzione  $\delta$  si ha poi  $N_\delta = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  e quindi il supporto di  $\delta$  è  $\{0\}$ . Analogamente il supporto di  $\delta(t - a)$  è  $\{a\}$ .

Ciò posto, si ha la seguente:

**Definizione** - Sia  $T$  una distribuzione tale che:

- 1) il supporto di  $T$  è contenuto in  $[0, +\infty)$ ;
- 2) esiste  $\beta \in \mathbb{R}$  tale che

$$Te^{-\beta t} \text{ è una distribuzione temperata.} \quad (1)$$

Sia  $\alpha_T$  l'estremo inferiore delle costanti  $\beta$  soddisfacenti (1). Si chiama *trasformata di Laplace (nel senso delle distribuzioni) di  $T$* , e si indica con  $L_D[T]$ , il crochet

$$L_D[T] = \langle Te^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \rangle \quad (2)$$

dove  $\text{Re } s > \beta > \alpha_T$  e  $\lambda$  è una funzione tale che

$$\begin{aligned} \lambda &\in C^\infty(\mathbb{R}) \\ \lambda(t) &= 1 \quad \text{se } t \geq \varepsilon \quad (\varepsilon < 0) \\ \lambda(t) &= 0 \quad \text{se } t \leq \sigma, \quad (\sigma < \varepsilon < 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Si può provare che il crochet (2) è indipendente dalla scelta della funzione  $\lambda$  (purché siano verificate le condizioni (3)) e dalla scelta di  $\beta$ . Il crochet (2) dipende invece dal numero complesso  $s$  ed è quindi una funzione complessa  $F(s)$ , ossia

$$L_D[T] = F(s) = \langle T e^{-\beta t}, e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st} \rangle.$$

. Pertanto la trasformata di Laplace di una distribuzione  $T$  è una **funzione "tradizionale"**, non una distribuzione, come accade invece per la trasformata di Fourier.

Si osservi poi che, per le ipotesi fatte, il primo elemento del crochet, ossia  $T e^{-\beta t}$  è una distribuzione temperata, mentre il secondo, i.e.  $e^{\beta t} \lambda(t) e^{-st}$ , è una funzione a decrescenza rapida, ossia un elemento di  $S$ .

## 1.1 Relazione con la trasformata "classica"

Ricordiamo quanto visto nelle passate lezioni per la trasformata di Laplace "in senso classico".

*Sia  $f \in \Lambda^1$ , ossia tale che:*

$$1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \tag{4}$$

$$2) \text{ esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t) e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R})$$

*e sia  $\alpha_f$  la sua ascissa di convergenza, i.e.*

$$\alpha_f = \inf \{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t) e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \}.$$

*Allora per ogni  $x > \alpha_f$ , la trasformata di Fourier di  $f(t) e^{-xt}$ , coincide con la trasformata di Laplace  $L[f]$  di  $f$ , ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F} \{ f(t) e^{-xt} \} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \tag{5}$$

*dove  $s$  è un qualunque numero complesso con  $\text{Re } s = x (> \alpha_f)$ .*

Ciò premesso, vale la seguente: **Proprietà.** *Se  $f$  soddisfa (4), allora la trasformata di Laplace di  $f$  (in senso classico) coincide con la trasformata di Laplace nel senso delle distribuzioni. In altre parole:*

$$L_D[f] \equiv L[f].$$

Pertanto la definizione (2) assume significato quando, ferme restando le altre condizioni,  $T$  non sia una funzione di classe  $\Lambda^1$ .

## 1.2 Esempi

Un semplice calcolo prova che:

$$\begin{aligned}L_D[\delta(t)] &= 1 \\L_D[\delta'(t)] &= s \\&\dots\dots\dots \\L_D[\delta^{(n)}(t)] &= s^n.\end{aligned}$$

Inoltre

$$L_D[\delta(t-a)] = e^{-sa}, \quad a > 0.$$

## 1.3 Funzioni razionali

Il seguente risultato generalizza quello visto alcune lezioni fa'.

**Teorema** *Ogni funzione razionale*

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

*è una trasformata di Laplace. Precisamente, se grado  $N < \text{grado } D$ ,  $F$  è la trasformata di Laplace una funzione di classe  $\Lambda^1$ ; altrimenti, se grado  $N \geq \text{grado } D$ ,  $F$  è la trasformata di Laplace di una distribuzione.*

Ad esempio le funzioni

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 8}{s^2 + 3s + 2}, F_2(s) = \frac{s^3 + 8}{s^3 + 3s + 2}$$

sono trasformate di una distribuzione, mentre

$$F_3(s) = \frac{s^2 + 8}{s^3 + 3s^2 + 2}$$

è la trasformata di una funzione di classe  $\Lambda^1$ .

Quando *grado  $N \geq \text{grado } D$* , il calcolo della antitrasformata di  $F = N/D$  si effettua effettuando preliminarmente la divisione tra i due polinomi  $N$  e  $D$  e poi usando la tabella precedente e il metodo visto nelle passate lezioni.

In particolare, per la funzione  $F_1$ , effettuando la divisione si ottiene

$$F_1(s) = s - 3 + \frac{7s + 14}{s^2 + 3s + 2}.$$

L'antitrasformata è quindi

$$\delta'(t) - 3\delta(t) + g(t)$$

dove  $g$  è l'antitrasformata di

$$\frac{7s + 14}{s^2 + 3s + 2} \quad (6)$$

Essendo (6) una funzione razionale propria, la funzione  $g$  si calcola con la teoria dei residui.

## 1.4 Derivazione

Vale il seguente:

**Teorema** Sia  $g \in C^1(0, +\infty)$ ,  $g, g' \in \Lambda^1$ . Allora si ha:

(derivazione "in senso classico")

$$L[g'] = sL[g] - g(0+) ; \quad (7)$$

(derivazione "nel senso delle distribuzioni")

$$L_D[Dg] = sL[g] - g(0-).$$

Si osservi che il risultato in (7) **non** richiede che  $g$  sia nulla per  $t < 0$ . In altre parole (7) vale **indipendentemente** dai valori assunti da  $g$  sul semiasse negativo.

Se  $g \notin C^1(0, +\infty)$ , allora (7) può non valere. A tal fine è sufficiente considerare la funzione

$$h(t) = u(t) - u(t - 5).$$

## 2 Complementi

### 2.1 Serie di distribuzioni

Sia  $\{T_n\}$  una successione di distribuzioni. Diremo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n$$

converge, se converge la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle T_n, \varphi \rangle \quad \text{per ogni } \varphi \in D.$$

Si provi, a titolo di esercizio, che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$$

converge.

#### 2.1.1 La distribuzione v.p. $(1/t)$

Consideriamo il funzionale  $T$  definito da

$$T : \varphi \in D \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt. \quad (8)$$

L'integrale in (8) è ben definito in quanto la funzione integranda è nulla per ogni  $t$  sufficientemente grande ( $\varphi \in D$ ) ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = 2\varphi'(0).$$

Si può provare che tale funzionale è lineare e continuo in  $D$  e quindi è una distribuzione. Tale distribuzione si indica con  $v.p.1/t$ , ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

Il motivo del nome dato a questa distribuzione è giustificato dal fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right),$$

ossia

$$\left\langle v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle =_{\text{def}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} \varphi(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \varphi(t) dt \right)$$

dove  $\varepsilon$  è una costante positiva.

### Proprietà:

- la derivata nel senso delle distribuzioni di  $\log |t|$  è  $v.p.\frac{1}{t}$ , i.e.

$$D(\log |t|) = v.p.\frac{1}{t}.$$

- Si ha  $t \cdot v.p.\frac{1}{t} = 1$ .

Infatti, usando il crochet e ricordando la definizione di prodotto di distribuzioni, si ottiene  $\forall \varphi \in D$

$$\begin{aligned} \left\langle t \cdot v.p.\frac{1}{t}, \varphi(t) \right\rangle &= \left\langle v.p.\frac{1}{t}, t\varphi(t) \right\rangle = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t\varphi(t) + t\varphi(-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} (\varphi(t) + \varphi(-t)) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt + \int_0^{+\infty} \varphi(-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi(t) \rangle \end{aligned}$$

- Trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = -j v.p.\frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{sgn(t)\} = -2j v.p.\frac{1}{\omega},$$

dove  $u(t)$  rappresenta la funzione scalino e  $sgn(t)$  la funzione "segno", i.e.

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}.$$

### 3 Esercizi (facoltativi)

Esercizio n.1 - Siano

$$T_1 = \sin t \cdot v.p. \frac{1}{t}$$
$$T_2 = t^n \cdot v.p. \frac{1}{t}$$

Provare che  $T_1, T_2$  sono temperate e calcolarne la trasf. di Fourier.

*Soluzione*

Per definizione di prodotto,  $T_1$  e  $T_2$  sono distribuzioni. Utilizzando il crochet si ottiene

$$T_1 = \frac{\sin t}{t}$$
$$T_2 = t^{n-1}.$$

Quindi entrambe sono distribuzioni temperate, in quanto funzioni a crescita lenta. La trasformata di Fourier di  $T_1$  coincide con la trasformata classica vista nelle prime lezioni, ossia con l'impulso rettangolare:

$$\mathcal{F}_D \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\} = \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin t}{t} \right\} = \begin{cases} \pi & \text{se } |\omega| \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per  $T_2$  si ha dalla tabella di sopra

$$\mathcal{F}_D \{t^{n-1}\} = 2\pi j^{n-1} \delta^{(n-1)}(\omega).$$

Esercizio n.2 - Sia

$$T = 3t \cdot v.p. \frac{1}{t} - (e^{3t} - 1)\delta(t).$$

Provare che  $T$  è temperata e

$$\mathcal{F}_D \{T\} = 6\pi\delta(\omega).$$

Esercizio n.3 - Calcolare la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) di

$$u(t-1),$$
$$u(1-t).$$

*Soluzione Poiché*

$$1 = u(t-1) + u(1-t),$$

e la trasformata di 1 è nota, è sufficiente calcolare la trasformata di  $u(t-1)$ .  
Avendosi

$$u(t-1) = u(t) - f(t), \quad (9)$$

dove

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

la trasf. di Fourier nel senso delle distribuzioni di  $f$  coincide con la trasformata classica, ossia

$$\mathcal{F}\{f\} = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega}.$$

Allora da (9) si ottiene

$$\mathcal{F}_D\{u(t-1)\} = -j \, v.p. \frac{1}{\omega} + \pi\delta(\omega) - \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega}.$$

Esercizio n. 4 - Siano

$$T_1 = \sin t \cdot v.p. \frac{1}{t}$$

$$T_2 = t^n \cdot v.p. \frac{1}{t}$$

Provare che  $T_1, T_2$  sono temperate e calcolarne la trasf. di Fourier.

Esercizio n. 5 - Sia

$$T = 3t \cdot v.p. \frac{1}{t} - (e^{3t} - 1)\delta(t).$$

Provare che  $T$  è temperata e

$$\mathcal{F}_D\{T\} = 6\pi\delta(\omega).$$