APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2013-2014

Tracce delle lezioni del 7 e 11 ottobre 2013

October 11, 2013

1 Proprietà dell'integrale in C

1. **Linearità** (c_1, c_2 costanti complesse):

$$\int_\gamma [c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)]ds = c_1 \int_\gamma f_1(s)ds + c_2 \int_\gamma f_2(s)ds$$

2. **Ordine:**

$$\int_\gamma f(s)ds = -\int_{-\gamma} f(s)ds.$$

3. **Additività:**

$$\int_{\gamma 1+\gamma 2} f(s)ds = \int_{\gamma 1} f(s)ds + \int_{\gamma 2} f(s)ds$$

4. **Modulo dell'integrale:** vale la maggiorazione :

$$\left|\int_\gamma f(s)ds\right| \leq L_\gamma \max_{s\in\gamma} |f(s)|$$

dove L_γ indica la lunghezza della curva γ.

2 Teoremi di Cauchy per l'integrale

Teorema 1 (di Cauchy) *Sia γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e sia f una funzione analitica all'interno di γ e continua su γ. Allora:*

$$\int_\gamma f(s)ds = 0.$$

Tale Teorema esprime il fatto che, in una regione in cui f è analitica, **l'integrale è indipendente dal cammino.**

Si osservi che se la funzione integranda non è analitica in TUTTA la regione limitata dalla curva γ, allora l'integrale puo' non essere nullo, come illustra l'esempio visto nelle lezioni scorse $[C(t) = s_0 + re^{jt},\ t \in [0, 2\pi],\ r > 0]$

$$\int_C \frac{1}{s - s_0} ds = 2\pi j. \tag{1}$$

Teorema 2 (di Cauchy) *Siano γ_1 e γ_2 due curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso con γ_1 contenente γ_2 [vedi figura 1]. Sia s_0 un punto interno a γ_2 e sia f analitica all'interno di γ_1 eccetto il punto s_0. Sia poi f continua su γ_1. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(s)ds = \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

Tale risultato esprime il fatto che l'integrale lungo una curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa non cambia se si "deforma con continuità la curva" purchè la funzione considerata sia analitica in tutta la regione compresa tra la curva originaria e la curva "deformata".

Ricordando l'integrale (1), indicando con γ una **qualunque** curva regolare (o generalmente regolare), semplice e chiusa, dai Teoremi 1 e 2 si ha allora

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{1}{s - s_0} ds = \begin{cases} 1 & \text{se } s_0 \text{ è interno a } \gamma \\ 0 & \text{se } s_0 \text{ è esterno a } \gamma \end{cases}.$$

Teorema 3 (di Cauchy) *Siano Γ, γ_1 e γ_2 tre curve regolari (o generalmente regolari) semplici, chiuse, percorse nello stesso senso poste come in figura 2. Siano s_1 e s_2 due punti interni rispettivamente a γ_1 e γ_2 e sia f analitica all'interno di Γ eccetto i punti s_1 e s_2. Sia poi f continua su Γ. Allora*

$$\int_\Gamma f(s)ds = \int_{\gamma_1} f(s)ds + \int_{\gamma_2} f(s)ds.$$

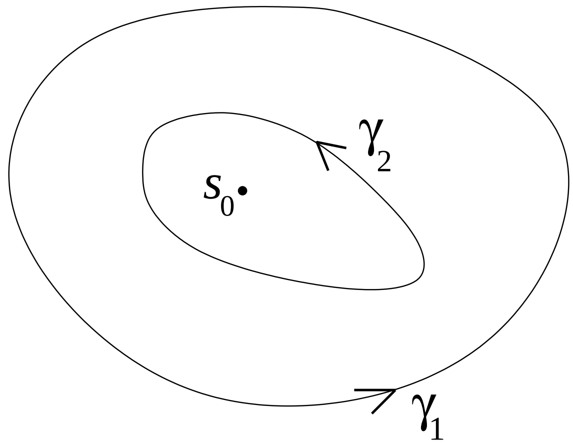

Figura 1

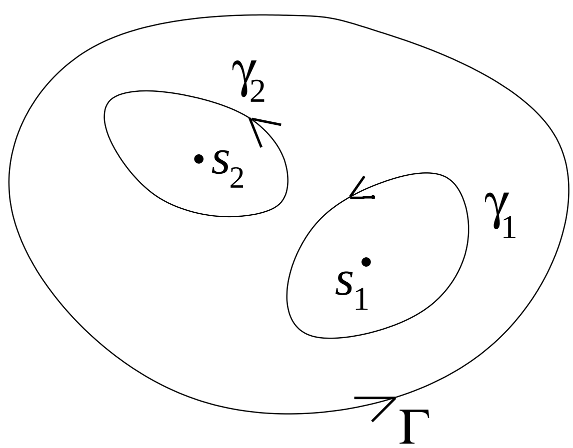

Figura 2

3 Singolarità

Definizione 1 - *Un punto s_0 si dice **punto singolare per** f se non esiste alcun intorno I di s_0 tale che f sia analitica in TUTTO I.*

Definizione 2 - *Sia s_0 un punto singolare per f. Allora s_0 si dice **punto singolare isolato** (o **singolarità isolata**) se esiste un intorno V di s_0 tale che f sia analitica in $V/\{s_0\}$ (i.e. f è analitica in tutto V eccetto s_0). Altrimenti il punto s_0 si dice **non isolato** (o **punto di accumulazione**).*

Esempi :

$f_1(s) = \dfrac{s^2+1}{(s-2)(s-4)^3} \Rightarrow s = 2, s = 4$ sono sing. isolate.

$f_2(s) = \overline{s} \quad \Longrightarrow$ ogni punto $s \in \mathbb{C}$ è una sing. non isolata

$f_3(s) = \dfrac{1-\cos s}{s^2} \Longrightarrow \; s = 0$ è singolarità isolata

$f_4(s) = \sin(1/s) \Longrightarrow s = 0$ è sing. isolata

$f_5(s) = \dfrac{1}{\sin(1/s)} \Longrightarrow s = 0$ è sing. non isol., $s_k = \dfrac{1}{k\pi}$ sono sing. isol. $(k \neq 0)$.

Per quanto riguarda l'ultimo esempio, il ragionamento si basa anche sulla seguente proprietà delle funzioni trigonometriche in campo complesso: "*gli zeri della funzione seno (o coseno) in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri della funzione seno (o, rispettivamente, coseno) in $\mathbb{R}$.*"

Definizione 3 - *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora s_0 si chiama:*

- ***singolarità eliminabile** se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ esiste finito:}$$

- ***singolarità polare** se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = \infty;$$

- ***singolarità essenziale** se*

$$\lim_{s \to s_0} f(s) \text{ non esiste.}$$

⧫ *Nel caso in cui s_0 sia una singolarità polare, allora s_0 si dice* ***polo di ordine*** $N > 0$ *(con N numero naturale) se*

$$\lim_{s \to s_0} (s - s_0)^N f(s) \text{ è } \textbf{finito e diverso} \text{ da } 0 \, .$$

In riferimento agli esempi di prima si ha: la funzione f_1 ha in $s = 2$ un polo semplice e in $s = 2$ un polo triplo. La funzione f_3 ha in $s = 0$ una sing. eliminabile. La funzione f_4 ha in $s = 0$ una singolarità essenziale. La funzione f_5 ha in $s_k = 1/(k\pi)$ $(k \neq 0)$ singolarità polari semplici.

4 Serie di Laurent

Teorema di Laurent *Sia f una funzione analitica in un intorno V di s_0, eccetto, al più s_0, ossia* $\mathbf{f} \in \mathbf{C^1}(\mathbf{V}/\{\mathbf{s_0}\})$ *Ciò posto per $s \in V/\{s_0\}$ si ha*

$$f(s) = \underbrace{...\frac{c_{-k}}{(s-s_0)^k} + ... + \frac{c_{-1}}{s-s_0}}_{(+)} + \underbrace{c_0 + c_1(s-s_0) + .. + c_k(s-s_0)^k + ...}_{(*)} \tag{2}$$

dove i coefficienti c_k (chiamati coefficienti di Laurent) sono dati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-s_0)^{k+1}} ds \tag{3}$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0.

La serie (2) si chiama serie di Laurent in s_0; la serie di Laurent in s_0 è quindi una serie di potenze del binomio $(s-s_0)$ ad esponente intero (positivo, negativo, nullo). In particolare, la serie (+) in (2), relativa alle potenze del binomio $(s - s_0)$ ad esponente negativo si chiama **parte principale** della serie di Laurent e la parte (*) rimanente si dice **parte analitica.**

PROPRIETA':

⧫ Lo sviluppo in serie di Laurent è unico.

⧫ La serie di Laurent è derivabile termine a termine in ogni insieme chiuso contenuto in $V/\{s_0\}$.

Dal Teorema di Laurent si ha il seguente:

Corollario 1 (Taylor). *Sia f analitica in tutto V, s_0 compreso. Allora per ogni $s \in V$ si ha*

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (s - s_0)^k = c_0 + c_1(s - s_0) + .. + c_k(s - s_0)^k + ... \qquad (4)$$

La formula (4) esprime il fatto che una funzione analitica in un intorno V di un punto s_0 è in tale intorno sviluppabile in serie di potenze e tale serie (i.e. (4)) si chiama *serie (o sviluppo) di Taylor di f in s_0.*

Utilizzando la proprietà che lo sviluppo di Taylor (4) è unico, si ottengono poi i seguenti sviluppi "notevoli":

$$\begin{aligned}
e^s &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^n}{n!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\
\sin s &= s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\
\cos s &= 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{s^{2n}}{(2n)!} + ... && \forall s \in \mathbb{C} \\
\frac{1}{1-s} &= 1 + s + s^2 + ... + s^n + ... && \forall s : |s| < 1.
\end{aligned}$$

ESERCIZI

1. Usando la derivabilita' termine a termine della serie (4) e l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor, si provi il seguente risultato:

   Corollario 2. *Sia f analitica in tutto V, s_0 compreso e sia (4) la serie di Taylor associata. Allora*

   $$c_n = \frac{f^{(n)}(s_0)}{n!}.$$

2. Si consideri la funzione $f(s) = s \sin(1/s)$. Sviluppando f in serie di Laurent in un intorno di $s = 0$ si ha

   $$f(s) = s \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{s^5} + ... \right) = 1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{s^4} + ... \qquad .$$

   Poiché la parte principale di tale sviluppo ha infiniti termini, allora $s = 0$ è una singolarità essenziale per $f(s) = s \sin \frac{1}{s}$.

Il Teorema di Laurent fornisce una equivalente classificazione delle singolarità isolate. Vale infatti il seguente:

Teorema (IMPORTANTE!!) *Sia s_0 una singolarità isolata per f. Allora:*

(i) *s_0 è singolarità eliminabile se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata non c'è (i.e. $c_k = 0$ per ogni indice $k < 0$);*

(ii) *s_0 è singolarità polare di ordine $N(> 0)$ se e solo se nella serie di Laurent associata si ha $c_{-N} \neq 0$ e $c_{-k} = 0$ per ogni indice $k > N$ (e quindi la parte principale è composta da un numero finito di termini);*

(iii) *s_0 è singolarità essenziale se e solo se la parte principale della serie di Laurent associata ha infiniti termini.*

Attenzione a non confondere l'ordine del polo N con il numero degli elementi non nulli della parte principale della serie di Laurent. Analogamente, nel caso di singolarità essenziali la parte principale ha sì infiniti termini, ma non è detto che TUTTI i coeffienti c_{-i}, con $i > 0$, siano non nulli.

5 Classificazione del punto all'infinito.

La classificazione delle singolarità al finito si estende con facilità al punto all'infinito. Precisamente:

Definizione - *Il punto $s = \infty$ si dice singolarità (isolata o non isolata e, nel primo caso, eliminabile, polare o essenziale) se lo è il punto $u = 0$ per la funzione $g(u) = f(1/u)$.*

Esempi - Classificare il punto $s = \infty$ per le funzioni razionali

$$f(s) = \frac{2s}{9s+1},\ g(s) = \frac{2s^5}{9s+1},\ h(s) = \frac{2s}{9s^3+1}.$$

Per la funzione f, il punto $s = \infty$ è un punto di regolarità e così per h (in quest'ultimo caso $s = \infty$ è anche uno zero doppio). Per la funzione g, il punto $s = \infty$ è un polo di ordine 4.

In generale, una funzione razionale (i.e. il rapporto tra due polinomi N e D)

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

ha un polo in $s = \infty$ di ordine $p > 0$ se e solo se grado$N -$grado$D = p$.

Esercizio - Classificare $s = \infty$ per le funzioni seguenti:

$$
\begin{aligned}
&f(s) = e^{1/s} \qquad (s = \infty \text{ punto "regolare"}) \\
&f(s) = s\sin(\frac{1}{s}) \qquad (s = \infty \text{ sing. elim.}) \\
&f(s) = \frac{1}{\sin s} \qquad (s = \infty \text{ sing. non isolata}) \\
&f(s) = e^s \qquad (s = \infty \text{ sing. essenziale}) \\
&f(s) = \frac{s^3+1}{s+4} \qquad (s = \infty \text{ polo di ordine 2}).
\end{aligned}
$$

Nella classificazione delle singolarità si rivelano particolarmente utili i seguenti:

Teorema *Ogni funzione* ***non*** *razionale ha singolarità essenziali e/o non isolate. Viceversa, se una funzione ha almeno una singolarità essenziale o non isolata, allora tale funzione è* ***non*** *razionale.*

Corollario *Sia f una funzione razionale. Allora f è costante oppure ha* ***soltanto*** *singolarità di tipo eliminabile e/o polare.*

Esercizio : Classificare le singolarità di

$$f_1(s) = \frac{\sin s}{(s-4)(e^s-1)}, f_2(s) = \frac{5s^2 - s}{e^{4js}-1}.$$

6 Residui

Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora, come si è visto, esiste un intorno V di s_0 tale che f è analitica in $V/\{s_0\}$ e f è sviluppabile in serie di Laurent in tale intorno, ossia $\forall s \in V/\{s_0\}$ si ha

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (s-s_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-s_0)^{n+1}} ds \qquad (5)$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0.

Si chiama *Residuo di* f *in* s_0, e si indica con $\mathrm{Res}[f, s_0]$ il numero

$$Res[f, s_0] = c_{-1}$$

dove c_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent associata, relativo al termine $(s - s_0)^{-1}$.

Da (5) ne segue allora

$$Res[f, s_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma f(s) ds.$$

Il Teorema di Cauchy, visto nelle lezioni scorse, puo' allora essere riformulato nel modo seguente:

1º Teorema dei Residui *Sia* Γ *una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia* f *analitica all'interno di* Γ *eccetto un numero FINITO di punti* $s_1, s_2, ..s_N$. *Sia infine* f *continua su* Γ. *Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma f(s) ds = Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + ... + Res[f, s_N].$$

7 Formule per il calcolo dei Residui

Si ha:

s_0 sing. eliminabile $\Longrightarrow Res[f, s_0] = 0;$ (*)

s_0 polo semplice $\Longrightarrow Res[f, s_0] = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) f(s)$

s_0 polo ordine $N > 1 \Longrightarrow Res[f, s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} \left[(s - s_0)^N f(s) \right]$ (**)

Si osservi che il viceversa dell'implicazione (*) puo' essere falso. Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{1}{s^3} \tag{6}$$

ha in $s = 0$ un polo del terzo ordine. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno di $s = 0$ **coincide** con (6) (ricordiamo che tale sviluppo è una serie di potenze di s, con esponente positivo o negativo), si ha $c_{-1} = 0$ e, di conseguenza, $Res[f, 0] = 0$. Alla stessa conclusione si puo' giungere utilizzando la formula (**).

Si osservi infine che se s_0 è un polo semplice per f allora necessariamente il limite

$$\lim_{s \to s_0} (s - s_0) f(s)$$

esiste finito e non nullo. Pertanto, in tal caso $Res[f, s_0] \neq 0$. Se invece s_0 è un polo di ordine $N > 1$, allora può aversi $Res[f, s_0] = 0$. Si dia un esempio in proposito.

Esempio n. 1 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{2s + 1}{s(s + 4)(s + 1)^2} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -1$. Si ha poi che $s = 0$ è un polo semplice e $s = -1$ è un polo doppio. Pertanto

$$I_1 = Res[f, 0] + Res[f, -1]$$

e

$$Res[f, 0] = \lim_{s \to 0} s f(s) = \lim_{s \to 0} \frac{2s + 1}{(s + 4)(s + 1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$Res[f, -1] = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \left[(s + 1)^2 f(s) \right] = \lim_{s \to -1} \frac{d}{ds} \frac{2s + 1}{s(s + 4)} = \frac{-4}{9}.$$

Esempio n. 2 Calcolare ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$)

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -2$. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = -2$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = Res[f, 0] + Res[f, -2]$$

e

$$
\begin{aligned}
Res[f,0] &= 0\\
Res[f,-2] &= \lim_{s\to -2}(s+2)f(s) = \lim_{s\to -2}\frac{\sin s}{s(s+4)} = \frac{\sin 2}{4}.
\end{aligned}
$$

Esempio n. 3 Calcolare ($\gamma(t) = 8e^{jt}$, $t \in [0,2\pi]$)

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{\sin s}{s^2-7s}ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ e $s = 7$. Entrambe sono interne a γ. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = 7$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = Res[f,0] + Res[f,7]$$

e

$$
\begin{aligned}
Res[f,0] &= 0\\
Res[f,7] &= \lim_{s\to 7}(s-7)f(s) = \lim_{s\to 7}\frac{(s-7)\sin s}{s(s-7)} = \frac{\sin 7}{7}.
\end{aligned}
$$

Esempio n. 4 Provare che ($\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0,2\pi]$)

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{s}{e^{2s}-1}ds = 0.$$

Esempio n. 5 Provare che ($\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0,2\pi]$)

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{4}{(s-4)^2 s}ds = 0.$$

Soluzione: le singolarità sono $s = 4$ (polo semplice); $s = 0$ (eliminabile); $s_k = 2k\pi j$, $k \neq 0$, (poli semplici); $s = \infty$ (non isolata).