APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2013-2014

Traccia delle lezioni del 21 e 25 ottobre 2013

October 25, 2013

1 Complementi sulle funzioni analitiche

Dalla sviluppabilità in serie di Taylor, discende poi il seguente risultato, già parzialmente anticipato nelle prime lezioni.

Corollario - *Sia V un intorno di s_0 e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono* ***equivalenti****:*

-1) $f \in C^1(V)$ [i.e. f è analitica in V];

-2) le funzioni u, v ($u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) sono derivabili parzialmente in V con derivate continue ed inoltre in V valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$u_x(x, y) = v_y(x, y)$$
$$u_y(x, y) = -v_x(x, y);$$

-3) $f \in C^\infty(V)$;

-4) f è sviluppabile in serie di potenze in V.

Si osservi che nell'ambito dell'analisi reale in generale il precedente risultato puo' non essere vero, nel senso che esistono funzioni (reali di variabile reale) di classe C^∞ in un intervallo, ma non sviluppabili in serie di potenze in tale intervallo. Inoltre, chiaramente, esistono poi funzioni che sono derivabili soltanto un numero finito di volte. Pertanto, nell'ambito dell'analisi reale, in riferimento al corollario precedente si ha

$$1) \not\Rightarrow 3)$$
$$3) \not\Rightarrow 4).$$

2 Serie di potenze e trasformata Zeta

Dal volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

- Richiami sulle serie di potenze: massimo limite, raggio di convergenza, criterio di Hadamard - Cap. 3.2. tutto.

NOTA : A lezione è stato introdotto il concetto di $\limsup_n$ di una successione (a termini nonnegativi). Questo concetto COINCIDE con il concetto di $\max\lim_n$, introdotto nel Cap.3.2. In altre parole, se $\{a_n\}$ è una successione reale (con $a_n \geq 0$), allora

$$\limsup_n a_n = \max_n \lim a_n.$$

- Definizione di trasformata zeta - Cap. 3.3: Def. 3.1 e 3.2, Prop. 3.2, 3.3, 3.4.

  Inoltre:

- **Teorema** *Una funzione F complessa di variabile complessa è una trasformata Zeta se e solo se $z = \infty$ è un punto di regolarità o una singolarità eliminabile per F*, ossia, equivalentemente, se e solo se F è sviluppabile in serie di Laurent all'infinito e lo sviluppo è privo di parte principale.

Esercizio Quale delle seguenti funzioni è una trasformata Zeta ?

$$F_1(z) = \sin z;\ F_2(z) = \sin(1/z);\ F_3(z) = 1/\sin z;$$
$$G_1(z) = \frac{z^2+1}{z^3+7};\quad G_2(z) = \frac{z^4+1}{z^3+7}.$$

Risposta: lo sono F_2 e G_1, non lo sono le altre [F_1 ha una sing. essenziale all'infinito, F_3 ha in $s = \infty$ una sing. non isolata e G_2 un polo semplice]