APPLICAZIONI di MATEMATICA A.A. 2013-2014

Traccia delle lezioni del 11 e 15 novembre 2013

November 15, 2013

1 Trasformata Zeta

Dal volume M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

- Antitrasformata Zeta - Cap. 3.11: Teoremi 3.7 e 3.8. Inoltre:

  Teorema *Una funzione F complessa di variabile complessa è una trasformata Zeta se e solo se $z = \infty$ è un punto di regolarità o una singolarità eliminabile per F.*

  Si vedano infine tutti gli esempi di questo paragrafo.

- Calcolo dell'antitrasformata con la teoria dei residui - Cap. 3.12 : Formula (3.48) ed Esempi 3.13, 3.14, 3.15.

- Le proprietà del valore iniziale e finale - Cap. 3.10: Teoremi 3.5, 3.6 e osservazione 3.2

- Il teorema del campionamento (cenni) - Cap. 3.14:Teorema 3.9

2 La Trasformata di Laplace nell'analisi di reti elettriche

- Introduzione (Cap. 1 - paragrafo 1.1).
- **Funzioni di classe Λ^1- Definizione 1** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$\begin{gathered} 1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ 2) \text{ esiste } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty. \end{gathered} \tag{1}$$

E' evidente che se $\int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty$, allora $\int_0^\infty |f(t)|e^{-yt}dt < \infty$. per ogni $y > x$. Si chiama *ascissa di convergenza di* f, e si indica con α_f, il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}dt < \infty. \right\}.$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

si ha $u(t) \in \Lambda^1$ e $\alpha_u = 0$. Per le funzioni

$$\begin{aligned} &f_1(t) = e^{5t}u(t), \quad f_2(t) = tu(t), \quad f_3(t) = \sin t \; u(t), \\ &f_4(t) = e^{-9t}u(t), \quad f_5(t) = t^2u(t), \quad f_6(t) = u(t) - u(t-7) \end{aligned}$$

si ha rispettivamente

$$\alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \; \alpha_{f_4} = -9, \; \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty.$$

Invece la funzione

$$g(t) = \begin{cases} \exp t^2 & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

non appartiene a Λ^1. Si veda inoltre il Cap. 1 - paragrafo 1.2, in cui la trasformata di Laplace è definita per funzioni di classe Λ. E' facile verificare che se $f \in \Lambda^1$, allora $f \in \Lambda$, ma in generale non vale il viceversa. Quindi la Definizione 1 data sopra risulta più generale.

- Definizione di trasformata di Laplace, comportamento all'infinito e analiticità (Cap. 1, paragrafo 1.3, Prop. 1.2, Prop. 3.1).
- Proprietà: linearità (Cap. 1 - paragrafo 1.4, Prop. 1.4), derivazione (Cap. 1 - paragrafo 1.9 Teorema 1.5), integrazione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Corollario 1.4), convoluzione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Teorema 1.7).
- Applicazioni a circuiti elettrici (Cap. 1.16)

3 Esercizi

A) Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti, determinando anche il raggio di convergenza.

$$f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad : \quad F(z) = \frac{8z^2}{(z^2-1)^2};$$

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{3n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \quad : \quad F(z) = \frac{e^3}{z(1-e^6 z^{-2})};$$

$$f_n = \begin{cases} e^{3n} & \text{se } n = 0,5,10,15,20,.... \\ 2 & \text{se } n = 1,6,11,16,21,.... \\ n & \text{se } n = 2,7,12,17,22,.... \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \; ; \; f_n = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ n & \text{se } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

A titolo di esempio si vedano anche gli esercizi negli Esempi 3.2, 3.3 e 3.4 e il relativo svolgimento.

B) Come evidenziato nel Teorema 3.2, il raggio di convergenza R_h della convoluzione discreta $h_n = f_n * g_n$ verifica la disuguaglianza

$$R_h \le \max\{R_f, R_g\},$$

dove R_f e R_g sono i raggi di convergenza di $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$, rispettivamente. Nel Cap. 3.7 è fornito un esempio in cui $R_h < R_f$ e $R_h < R_g$. Si costruisca un altro esempio ragionando sulle singolarità delle trasformate zeta F e G.