ANALISI MATEMATICA 3
ELM+TEM
A.A. 2012-2013
ESERCIZI parte seconda

March 27, 2013

1 Trasf. di Fourier

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire se le seguenti funzioni razionali ammettono trasformata di Fourier, specificando se in L^1 e/o in L^2.

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{t^2+5t+8};\ f_2(t) = \frac{t-2}{t^2+5t+8}; \\ f_3(t) &= \frac{2}{3+2t^2};\ f_4(t) = \frac{t+1}{2t^2+3}; \\ f_5(t) &= \frac{t+5}{t^2+2t-1};\ f_6(t) = \frac{5}{t^2-5t-4}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.2 - Per le funzioni di cui all'Esercizio 1.1. che ammettono trasformata di Fourier, calcolarne la trasformata e specificare se tale trasformata $F \in L^1$ oppure $\in L^2$. Calcolare poi la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\begin{aligned} g_i(t) &= f_i(t)e^{5jt} \\ h_i(t) &= f_i(t-9), \end{aligned}$$

dove f_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 1.1 che ammettono trasformata di Fourier.

ESERCIZIO 1.3 - Stabilire se le seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 oppure no. In caso affermativo, calcolare l'antitrasformata di Fourier.

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{2\omega^3}{\omega^2+j};\ F_2(\omega) = \frac{2\omega}{\omega^2-j};\\ F_3(\omega) &= \frac{2j}{\omega^2+4};\ F_4(\omega) = \frac{2\omega^2}{\omega^2+\omega+6};\\ F_5(\omega) &= \frac{1}{\omega+j};\ F_6(\omega) = \frac{\omega-4}{(\omega-4)^2+6};\\ F_7(\omega) &= \frac{1}{\omega^2+\omega+6};\quad F_8(\omega) = \frac{1}{\omega^2+j}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.4 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove F_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 1.3 che appartengono a L^2.

ESERCIZIO 1.5 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{5s^2+4}{s^2+16}; F_2(s) = \frac{5s^2+4}{s^2-16}; F_3(s) = \frac{5s+4}{s^2+16};\\ F_4(s) &= \frac{1+s}{|s|^2};\quad F_5(s) = \frac{1}{|s|};\ F_6(s) = \frac{js-1}{s^2+4j}.. \end{aligned}$$

2 Trasformata Laplace

Esercizio 2.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$
\begin{aligned}
&F_1(s)=\frac{1}{s^2+4s+5};\ F_2(s)=\frac{1}{s^2+4s+3};\\
&F_3(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s};\ F_4(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s-2)(s^2+4)};\\
&F_5(s)=\frac{1}{(s-1)^2(s+2)};\qquad F_6(s)=\frac{s^2+2s-1}{s^3-2s^2+2s-1}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una distribuzione?

$$
\begin{aligned}
&G_1(s)=\frac{s^2+4}{s^2-4};\ G_2(s)=\frac{s^2+4}{s^2-4s};\ G_3(s)=\frac{s+4}{s^2-4};\\
&G_4(s)=\frac{s^2+4}{s^3-4};\ G_5(s)=\frac{s^3+4s}{s^2-4};G_6(s)=\frac{s^4+4}{s^2-4s};\\
&G_7(s)=\frac{s}{s^4-4};\ G_8(s)=\frac{4}{s^2-4};\ G_9(s)=\frac{s^4+4s^2}{s^3-4}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali ammette trasformata di Laplace in senso classico? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t<0$). In caso affermativo, si determini l'ascissa di convergenza α_f.

$$
\begin{array}{ll}
f_1(t)=e^{-t^2}; & f_2(t)=t^7+14t^6;\\
f_3(t)=t\cos t; & f_4(t)=e^t\cos t^2;\\
f_5(t)=e^{t^2}\cos t; & f_6(t)=t^{-4}.
\end{array}
$$

$$
g_1(t)=\begin{cases} 21 & \text{se } t>6\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases};
$$

$$
g_2(t)=\begin{cases} e^t\sin t & \text{se } t>4\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases};
$$

$$
g_3(t)=\begin{cases} t^{-4} & \text{se } t>4\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}.
$$

Soluzioni Esercizio 2.1 Per $t > 0$ si ha:

$$
\begin{aligned}
f_1(t) &= e^{-2t}\sin t \\
f_2(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) \\
f_3(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t} \\
f_4(t) &= \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t \\
f_5(t) &= \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^{t} + 3te^{t}) \\
f_6(t) &= 2e^{t} + e^{t/2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).
\end{aligned}
$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).