

ANALISI MATEMATICA 3
ELM+TEM
A.A. 2012-2013
ESERCIZI parte 3 e fac-simile compito

April 10, 2013

1 Equazioni differenziali lineari

Esercizio 1.1 Usando la trasformata di Laplace, determinare la soluzione dei seguenti problemi ai dati iniziali (per $t > 0$)

a) $y'' + 7y' + 12y = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$	b) $y'' - 8y' - 9y = 0$ $y(0) = 4, \quad y'(0) = 1$
---	--

c) $y'' + 6y' + 8y = 0$ $y(0) + y'(0) = 0, \quad y(0) - y'(0) = 1$	d) $y'' + 5y' = 0$ $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
---	---

Esercizio 1.2 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante.

- 1) $y'' - 7y' + (x^2 - 1)e^{7x}y = 0$
- 2) $y'' + 7xy' + (1 - x^2)y = 0$
- 3) $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$
- 4) $y'' + 5xy' - 4xy = 0$
- 5) $y'' + \frac{3-x}{x+3}y = 0$
- 6) $y'' + \frac{x^3 - 3x - 1}{x(x^2 + 9)}y = 0$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 1), 3) e 6); nonoscillanti le altre.

Esercizio 1.3 Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \quad (1)$$

dove le funzioni a e b sono continue in $[0, \infty)$.

1) La funzione $\tan x$ può essere soluzione di (1)?

2) Le funzioni $y_1(x) = 75x - 1$, $y_2(x) = x \sin x$ possono essere contemporaneamente soluzioni di (1)?

Esercizio 1.4 Stabilire quale delle seguenti equazioni è oscillante e quale nonoscillante

- 1) $y'' + 4xy' + e^{-4x^2}y = 0$
- 2) $y'' + (3 - \sin x)y = 0$
- 3) $y'' - 2y' + 6e^{4x}y = 0$

Risposta: sono oscillanti le equazioni 2) e 3); nonoscillanti la 1).

Esercizio 1.5 Studiare, al variare del parametro reale λ , l'oscillazione dell'equazione

$$y'' + 5\lambda e^x y = 0.$$

Esercizio 1.6 Esiste un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine del tipo

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con a e b funzioni continue per ogni x reale avente per soluzione $y(x) = (x - 15)^2$?

Risposte											
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Scrivere il numero della risposta sopra alla corrispondente domanda

• **Domanda 1** Sia $f(t) = 2/(3 + 2t^2)$ e sia F la sua trasf. di Fourier. Allora

- 1) $F(-1) = j\sqrt{2/3}e^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
- 2) $F(-1) = \pi\sqrt{2/3}e^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
- 3) $F(-1) = \pi\sqrt{2/3}e^{-\sqrt{3}/\sqrt{2}}$
- 4) $F(-1) = \pi j\sqrt{2/3}e^{\sqrt{3}/\sqrt{2}}$

• **Domanda 2** Siano g e $tg(t-1) \in L^1(R)$. Sia G la trasf. di Fourier di g . Allora la trasf. di Fourier di $tg(t-1)$ è:

- 1) $jG'(\omega)e^{-j\omega} + G(\omega)e^{-j\omega}$
- 2) $jG(\omega)e^{-j\omega}$
- 3) $jG'(\omega)e^{-j\omega}$
- 4) $G'(\omega)e^{-j\omega} + jG(\omega)e^{-j\omega}$

• **Domanda 3** Calcolare per $t > 0$ l'antitrasf. di Laplace di

$$\frac{5s}{s^2 + 7s + 6}$$

- 1) $6e^{6t}$
- 2) $-e^{-t}$
- 3) $e^{-t} + 6e^t$
- 4) $-e^{-t} + 6e^{-6t}$

• **Domanda 4** Quale o quali delle seguenti equazioni è oscillante?

$$\begin{aligned} A) \quad y'' + 5y' &= 0; \quad B) y'' + 7y = 0 \\ C) y'' - 5y' &= 0; \quad D) y'' - 5y = 0 \end{aligned}$$

- 1) nessuna delle altre risposte è corretta.
- 2) $B)$
- 3) $A)$ e $B)$
- 4) $B)$ e $C)$

• **Domanda 5** Sia G la trasform. di Fourier di $tf(t)$, dove f è definita nella domanda contrassegnata con (*). Allora

- 1) $G \in L^2(R)$
- 2) G non è derivabile in R
- 3) G non è continua in R
- 4) G è dispari

• **Domanda 6** Calcolare per $t < 0$ l'antitrasf. di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{3\omega}{(\omega^2 + 4)(\omega + j)}$$

- 1) $-e^t + (3/2)e^{2t}$
- 2) $-e^{-t} - (3/2)e^{2t}$
- 3) $e^t - (3/2)e^{-2t}$
- 4) $e^{-t} - (3/2)e^{-2t}$

• **Domanda 7** Quale tra le seguenti funzioni ha trasf. di Fourier di classe $C^2(R)$?

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{3}{(t^2 - 3jt - 2)}, \quad f_2(t) = \frac{3}{(t - j)^2(t + 2j)}, \\ f_3(t) &= \frac{3}{(t + j)^2(t + 2j)^2} \end{aligned}$$

- 1) nessuna
- 2) f_2 e f_3
- 3) f_1
- 4) f_3

• **Domanda 8 (*)** Sia

$$f(t) = \frac{\sin t}{t^4 + 4t^2 + 6}$$

e sia F la sua trasf. di Fourier. Allora

- 1) $F(0+) \neq F(0-)$
- 2) $F(0) = 0$
- 3) $F(0) + F(+\infty) = +\infty$
- 4) $F(0) + F(+\infty) = 1$

• **Domanda 9** La funzione $f(x) = x \sin x$ può essere soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

con a e b funzioni continue in $[0, +\infty)$?

- 1) No, perché f è persistente.
- 2) Sì, scegliendo a e b in modo opportuno
- 3) No, perché ha uno zero doppio in $x = 0$.
- 4) No, perché f è oscillante.

SOLUZIONE

Risposte	3	1	4	2	1	1	4	2	3
Domande	1	2	3	4	5	6	7	8	9