

ANALISI MATEMATICA III (ELM+TEM)

A.A. 2013-2014

Traccia delle lezioni del 10 e 12 marzo 2014

March 12, 2014

1 Derivazione

Ricordiamo il Teorema della derivazione, visto la settimana scorsa.

Teorema (Derivazione) Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
Allora

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Iterando tale risultato, si ha facilmente il seguente:

Corollario Sia $f \in C^N(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, ..., $f^{(N)} \in L^1(\mathbb{R})$.
Allora

$$\mathfrak{F}\{f^{(N)}\} = (j\omega)^N \mathfrak{F}\{f\}.$$

In particolare, se $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^1(\mathbb{R})$, $f'' \in L^1(\mathbb{R})$, allora

$$\mathfrak{F}\{f''\} = -\omega^2 \mathfrak{F}\{f\}.$$

Si osservi che l'ipotesi " $f \in C^1(\mathbb{R})$ " nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

2 Trasformata in L^1

Ricordiamo la formula dell'antitrasformata:

Teorema Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$. Ciò premesso si ha

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1)$$

Se $F \in L^1(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (1) converge non solo nel senso del valore principale, ma anche in senso generalizzato (o improprio). In altre parole, se $F \in L^1(\mathbb{R})$ la formula dell'antitrasformata diviene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ può accadere che la sua trasformata $F = \mathfrak{F}\{f\}$ non appartenga a $L^1(\mathbb{R})$, come illustra, ad esempio, il caso dell'impulso rettangolare. Pertanto, come si dice, lo spazio L^1 non è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier".

Condizioni sufficienti affinché la trasformata appartenga a $L^1(\mathbb{R})$ si ottengono come immediata conseguenza del teorema della derivazione. Si hanno infatti i seguenti:

Corollario Sia $f \in C^n(\mathbb{R})$, $f, f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $F = o(\omega^{-n})$ per $|\omega| \rightarrow \infty$, ossia

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{F(\omega)}{\omega^{-n}} = 0$$

dove $F = \mathfrak{F}\{f\}$.

Il significato di tale Corollario è il seguente: "la trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ tende a zero (per $|\omega| \rightarrow +\infty$) tanto più velocemente, quanto più f è "liscia" (e con derivate in $L^1(\mathbb{R})$)"

Corollario Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$; allora $F \in L^1(\mathbb{R})$ (e quindi nella formula della antitrasformata si può omettere la sigla v.p., in quanto, in tal caso, (1) e (2) coincidono).

3 La funzione integrale e la convoluzione per la trasf. di Fourier

Teorema (Integrazione) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{g\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}.$$

Poiché la trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$ è una funzione continua per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, dalla proprietà precedente si ha il

Corollario Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dove $g(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, si ha

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = 0.$$

La Convoluzione

Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Si chiama *prodotto di convoluzione* di f e g , e si indica con $f * g$, la funzione

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

Tale definizione è lecita, nel senso che è possibile provare che

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \implies f * g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Il prodotto di convoluzione gode delle proprietà:

$$\begin{array}{ll} \text{commutativa} & : f_1 * f_2 = f_2 * f_1 \\ \text{associativa} & : (f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) \\ \text{distributiva} & : (f_1 + f_2) * f_3 = (f_1 * f_3) + (f_2 * f_3) \end{array}$$

Tali proprietà, caratteristiche dell'usuale prodotto, giustificano il nome di prodotto di convoluzione dato a (3). Vale il seguente:

Teorema Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Posto $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f\}$, $G(\omega) = \mathfrak{F}\{g\}$, si ha

$$\mathfrak{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega).$$

In altre parole, l'antitrasformata di Fourier della funzione $H(\omega) = F(\omega)G(\omega)$ è la convoluzione $f * g$.

4 La traslazione

Traslazione in frequenza - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\gamma t}\} = F(\omega - \gamma), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Traslazione temporale - Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$. Allora:

$$\mathfrak{F}\{f(t - A)\} = e^{-jA\omega}F(\omega), \quad A \in \mathbb{R}.$$

Come vedremo nelle prossime lezioni, il prodotto di convoluzione interviene nella risolubilità di equazioni (o sistemi) differenziali lineari a coefficienti costanti.

5 Il Teorema di Plancherel e la trasformata in L^2

Vale il seguente:

Teorema di Plancherel - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, Allora:

1) *L'integrale (nel senso del valore principale)*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

esiste per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, eccetto, al più, un insieme di misura nulla.

Posto allora

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

si ha inoltre:

2) $F \in L^2(\mathbb{R})$

3) *Vale la formula*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

4) *Vale l'identità:*

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega.$$

COMMENTI : la proprietà 4) è detta anche **principio di conservazione della norma (o dell'energia)**.

La proprietà 1) suggerisce la seguente definizione.

DEFINIZIONE - Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$; si chiama *Trasformata di Fourier in L^2* , la funzione F definita da

$$F(\omega) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (4)$$

OSSERVAZIONE : se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, allora l'integrale in (4) coincide con l'integrale improprio, ossia la trasformata di Fourier in L^2 **coincide** con la trasformata di Fourier in L^1 , vista in precedenza. La definizione precedente è pertanto un'estensione del concetto di trasformata di Fourier e, ovviamente, assume rilevanza per quelle funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$ e non a $L^1(\mathbb{R})$, ossia per quelle funzioni per le quali la trasformata in $L^1(\mathbb{R})$ non è definita.

Ciò posto, la proprietà 3) del teorema di Plancherel diviene la formula dell'antitrasformata, formula che, a differenza di quanto accade in L^1 , vale sotto le stesse ipotesi che assicurano l'esistenza della trasformata.

6 Proprietà di simmetria

Dal teorema di Plancherel segue l'importante proprietà della trasformata in L^2 :

Teorema (Proprietà di simmetria) Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia $\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega)$ la sua trasformata. Allora $F \in L^2(\mathbb{R})$ e

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}\{f\}\} = 2\pi f(-\omega).$$

In particolare, se f è inoltre pari, allora la trasformata della trasformata di Fourier di f coincide con f , a meno di un fattore 2π .

Conseguenze:

◆ Poiché la trasformata dell'impulso rettangolare

$$f(t) = \begin{cases} M & \text{se } |t| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

è la funzione

$$F(\omega) = 2ML \operatorname{sinc}(\omega L),$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$g(t) = 2ML \operatorname{sinc}(Lt)$$

è

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = G(\omega) = \begin{cases} 2\pi M & \text{se } |\omega| \leq L \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Si osservi che tale trasformata non è continua in $\mathbb{R}$. Infatti $g \notin L^1(\mathbb{R})$!

◆ Poiché la trasformata dell'impulso esponenziale

$$h(t) = \exp(-|t|);$$

è la funzione

$$H(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2},$$

per la proprietà di simmetria, la trasformata di

$$\varphi(t) = \frac{2}{1 + t^2}$$

è

$$\mathfrak{F}\{\varphi(t)\} = \Phi(\omega) = 2\pi \exp(-|\omega|).$$

Si osservi che tale trasformata non è derivabile in $\omega = 0$ (ed infatti $t\varphi(t) \notin L^1(\mathbb{R})$).

7 Altre proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora valgono le seguenti proprietà (si ricordi che il caso $f \in L^1(\mathbb{R})$ è stato trattato nelle prime lezioni):

1. Se f è pari, allora F è pari e viceversa.
2. Se f è dispari, allora F è dispari e viceversa.
3. Se f è reale e pari, allora F è reale e pari e viceversa.
4. Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.
5. Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.

8 Il caso razionale

I seguenti risultati permettono di stabilire quando una funzione **razionale** f è trasformabile in L^2 secondo Fourier e, analogamente quando una funzione **razionale** F è una trasformata di Fourier in L^2 .

Teorema 1 *Sia R una funzione razionale, ossia*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora :

1) $R \in L^2(\mathbb{R})$ se e solo se R è propria e il polinomio D non ha zeri reali, ossia se e solo se

$$i) \text{ gr } D - \text{gr} N > 0 \tag{5}$$

$$ii) D(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) $R \in L^1(\mathbb{R})$ se e solo se

$$i) \text{ gr } D - \text{gr} N > 1$$

$$ii) D(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dal teorema precedente si ha subito il seguente:

Corollario *Sia R una funzione razionale, ossia*

$$R(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

con N, D polinomi primi tra loro. Allora :

$$R \in L^1(\mathbb{R}) \implies R \in L^2(\mathbb{R}).$$

Il viceversa di tale Corollario può essere falso, come illustra, ad esempio, la funzione

$$R(x) = \frac{4x + 3}{x^2 + 9}.$$

Infatti un facile calcolo mostra che $R \in L^2(\mathbb{R})$ e $R \notin L^1(\mathbb{R})$.

Per quanto riguarda poi la trasformata di Fourier, vale il seguente risultato:

Teorema 2 *Sia F una funzione razionale,*

$$F(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)}$$

con N e D polinomi, primi tra loro. Allora F è una trasformata di Fourier se e solo se sono verificate per F le condizioni (5). Inoltre l'antitrasformata di F appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$, ossia, indicata con f tale antitrasformata, si ha $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Si osservi che la proprietà " $f \in L^2(\mathbb{R})$ " discende dal Teorema di Plancherel, visto in precedenza, mentre la proprietà $f \in L^1(\mathbb{R})$ sarà dimostrata nelle prossime lezioni.

Utilizzando poi la teoria delle distribuzioni, vedremo alla conclusione del corso che il Teorema 2 può essere generalizzato nel modo seguente:

Teorema 3 *Sia F una funzione razionale, ossia*

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

con P, Q polinomi primi tra loro e $Q(\omega) \neq 0 \forall \omega \in \mathbb{R}$. Allora:

- se $\text{gr } P < \text{gr } Q$, allora F è trasformata di Fourier di una $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

- se $\text{gr } P \geq \text{gr } Q$, allora F è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

ESEMPIO 1

Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{5+t}{t-9}; & f_2(t) &= \frac{5+t}{t^2+9}; \\ f_3(t) &= \frac{5+t}{t^2-9}; & f_4(t) &= \frac{5+t}{(t^2+9)^2}. \end{aligned}$$

Allora f_1 e f_3 non sono trasformabili secondo Fourier (né in L^1 né in L^2), in quanto il denominatore ha zeri reali e quindi f_1 e f_3 non appartengono né a L^1 né a L^2 . Invece $f_2 \in L^2$ e f_4 appartiene sia in L^2 che in L^1 . Pertanto f_2 ammette trasformata di Fourier in L^2 e f_4 ammette trasf. di Fourier sia in L^1 che in L^2 e, ovviamente, le due trasformate coincidono

ESEMPIO 2

Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{5\omega}{\omega - 8}; & F_2(\omega) &= \frac{5\omega}{\omega^2 + 3\omega}; \\ F_3(t) &= \frac{5\omega}{\omega^2 + 3}; & F_4(\omega) &= \frac{5\omega^2 + 4}{\omega^2 + 8}. \end{aligned}$$

Allora F_1 e F_2 non appartengono a L^2 (il denominatore ha zeri reali) e quindi non sono trasformate di Fourier. Invece $F_3 \in L^2$ e quindi (vedi Teorema 2) la sua antitrasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Infine F_4 è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni (vedi Teorema 3).

9 Calcolo della trasf. (antitrasf.) nel caso razionale

Il calcolo della trasformata (antitrasformata) di Fourier nel caso razionale può essere effettuato utilizzando la Teoria dei Residui e il seguente:

Lemma di Jordan - Sia g una funzione complessa analitica in un intorno di infinito e $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$. Allora:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(s) e^{jms} ds = 0$$

se:

i) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s > 0$ e m è un numero reale positivo (vedi figura 1);

oppure se:

ii) C_R è una semicirconferenza di centro l'origine e raggio R , contenuta nel semipiano $\text{Im } s < 0$ e m è un numero reale negativo (vedi figura 2).

Tale Lemma, insieme alla teoria dei Residui, consente di calcolare agevolmente integrali del tipo

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N(u)}{D(u)} e^{ju\omega} du$$

dove N e D sono polinomi con grado $D > \text{grado } N$ e $D(u) \neq 0$ per **ogni** u reale. Il procedimento è stato sviluppato dettagliatamente a lezione ed altri esercizi saranno visti nelle prossime lezioni. Qui ricordiamo soltanto i due risultati finali, il primo per la trasformata e il secondo per l'antitrasformata.

Teorema (trasformata) - Sia f razionale, $f(t) = N(t)/D(t)$. Siano i polinomi N, D primi tra loro e siano verificate le condizioni

$$\begin{aligned} D(t) &\neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ \text{gr } D - \text{gr } N &> 0 \end{aligned}$$

Allora, indicati con $s_1, \dots, s_N$ gli zeri di D , si ha:

$$\mathfrak{F}\{f\} = F(\omega) = \begin{cases} 2\pi j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega < 0 \\ -2\pi j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}[f(s)e^{-j\omega s}, s_i] & \text{per } \omega > 0 \end{cases}.$$

Tale Teorema si estende immediatamente al caso dell'antitrasformata (con alcune minori modifiche). Vale infatti il seguente:

Teorema (antitrasformata) - Sia F razionale, $F(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$. Siano i polinomi P, Q primi tra loro e siano verificate le condizioni

$$\begin{aligned} i) & \text{gr } P < \text{gr } Q \\ ii) & Q(\omega) \neq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Allora, indicati con $s_1, \dots, s_N$ gli zeri di Q , l'antitrasformata f di F è data da:

$$f(t) = \begin{cases} -j \sum_{\text{Im } s_i < 0} \text{Res}[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t < 0 \\ j \sum_{\text{Im } s_i > 0} \text{Res}[F(s)e^{jst}, s_i] & \text{per } t > 0 \end{cases}.$$

dove la scrittura $\text{Res}[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i .

Esercizio 1.

Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$F(\omega) = \frac{2j}{\omega^2 + 4}.$$

Poiché F è pari, anche la sua antitrasformata f è pari. Utilizzando il metodo visto in precedenza si ha per $t > 0$

$$f(t) = j \operatorname{Res}[F(s)e^{jst}, 2j]$$

da cui, con facile calcolo,

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{-2t} \text{ se } t > 0$$

e quindi

$$f(t) = \frac{1}{2}je^{2t} \text{ se } t < 0.$$

Esercizio 2.

Calcolare le trasformate di Fourier di

$$g(t) = \frac{1}{t^2 + 1}e^{5jt}; \quad h_1(t) = \frac{1}{(t + 8)^2 + 1};$$

$$h_2(t) = \frac{1}{(t + 8)^2 + 1}e^{4jt}.$$

Posto

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1},$$

la sua trasformata di Fourier è (vedi lezioni scorse)

$$F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}. \quad (6)$$

Per esercizio, si calcoli la trasformata di f utilizzando il Teorema 1 precedente, e si verifichi il risultato (6).

Poiché $g(t) = f(t)e^{j5t}$, applicando la traslazione in frequenza si ottiene

$$\mathfrak{F}\{g(t)\} = F(\omega - 5).$$

Poiché $h_1(t) = f(t + 8)$, applicando la traslazione temporale si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_1(t)\} = F(\omega)e^{8j\omega}.$$

Infine, avendosi $h_2(t) = h_1(t)e^{j4t}$, applicando la traslazione in frequenza alla trasformata di h_1 si ottiene

$$\mathfrak{F}\{h_2(t)\} = F(\omega - 4)e^{8j(\omega - 4)}.$$

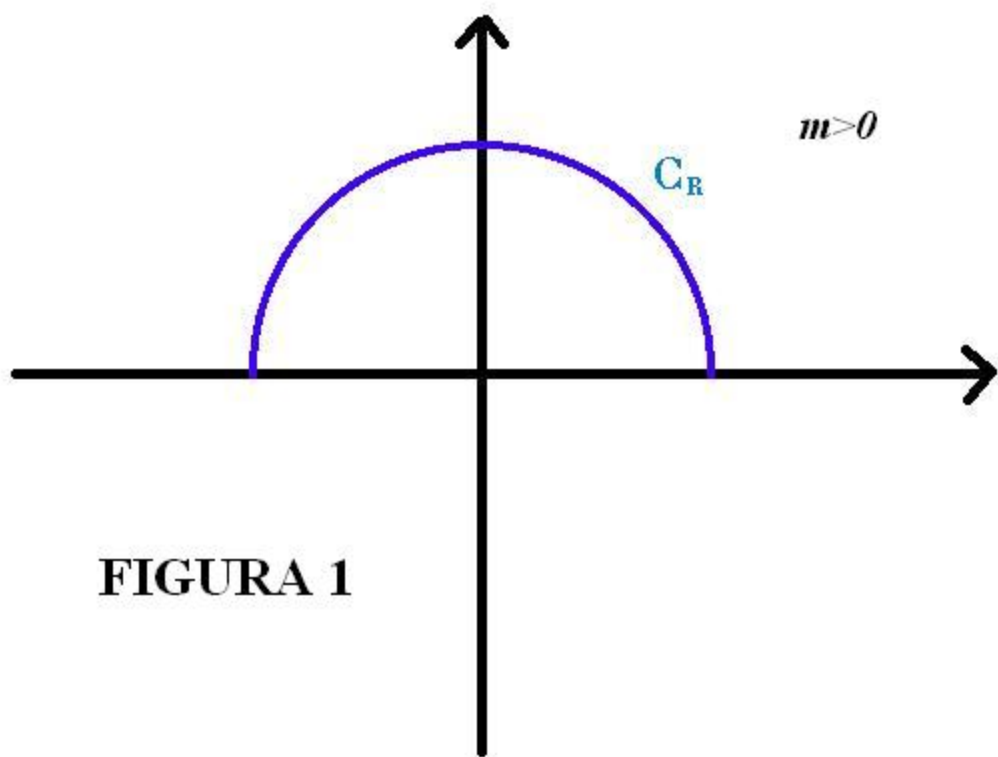


FIGURA 1

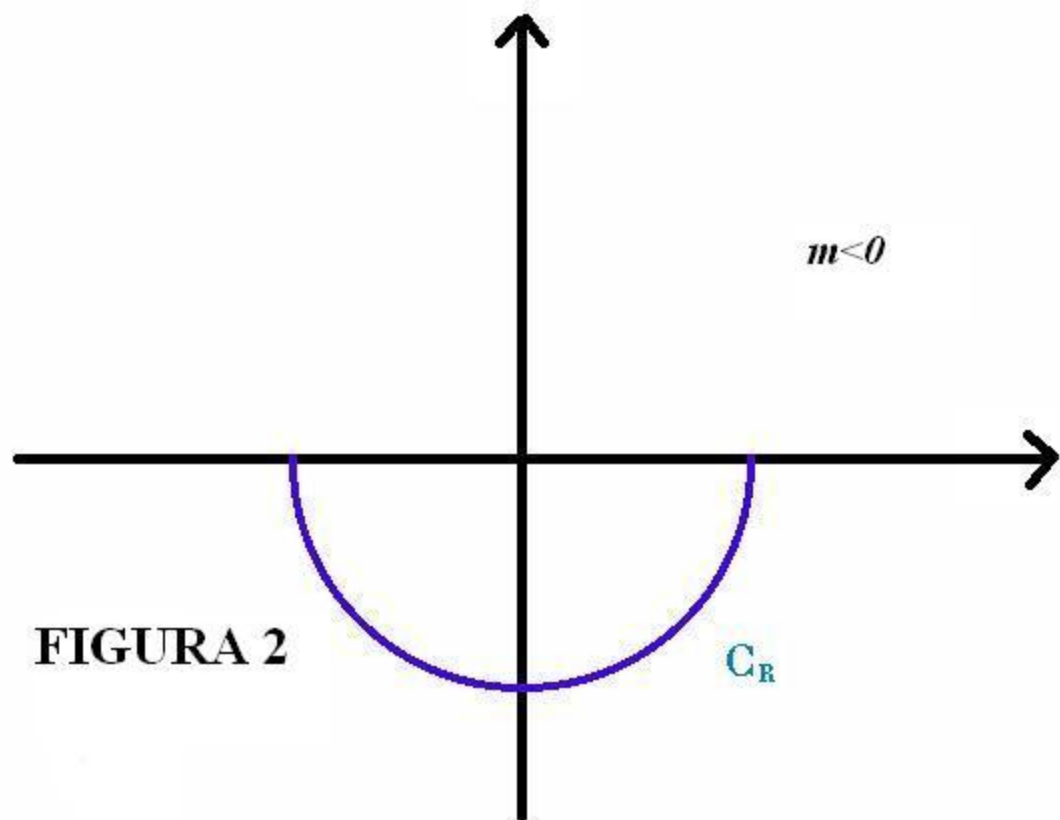


FIGURA 2