ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2013-2014
traccia delle lezioni del 17 e 19 marzo 2014

March 19, 2014

1 Il teorema di Shannon

Si veda Cap. 3.14 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

2 Ancora sul caso razionale

Nel caso razionale, utilizzando la teoria delle distribuzioni, i risultati provati in precedenza possono essere generalizzati nel modo seguente:

Teorema *Sia F una funzione razionale, ossia*

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$

con P, Q polinomi primi tra loro. Allora F è una trasformata di Fourier se e solo se $Q(\omega) \neq 0\ \forall \omega \in \mathbb{R}$. Precisamente:

- se gr $P <$ gr Q , allora F è trasformata di Fourier di una $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$;

- se gr $P \geq$ gr Q, allora F è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

ESEMPIO

Si considerino le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{5\omega}{\omega - 8}; \quad F_2(\omega) = \frac{5\omega}{\omega^2 + 3\omega};$$
$$F_3(t) = \frac{5\omega}{\omega^2 + 3}; \quad F_4(\omega) = \frac{5\omega^2 + 4}{\omega^2 + 8}.$$

Allora F_1 e F_2 non appartengono a L^2 (il denominatore ha zeri reali) e quindi non sono trasformate di Fourier. Invece $F_3 \in L^2$ e quindi la sua antitrasformata appartiene a $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Infine F_4 è trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni.

3 Trasformata di Laplace

Come si è visto, sono trasformabili secondo Fourier le funzioni appartenenti agli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$. Tali spazi tuttavia non sono sufficientementi "ampi" per poter applicare questo algoritmo alle soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Ad esempio, come è noto, le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 5y = 0$$

sono una combinazione lineare delle funzioni

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = e^{5t}$$

e le due funzioni e^t, e^{5t} non appartegono né a $L^1(\mathbb{R})$, né a $L^2(\mathbb{R})$. Nasce quindi il problema di come sia possibile applicare l'algoritmo della trasformata a funzioni la cui crescita (per $t \to +\infty$) sia di tipo "esponenziale". La Trasformata di Laplace fornisce una risposta in tal senso. Alla fine del corso, vedremo un'altra possibilità di "estensione" della trasformata di Fourier, e quest'ultima estensione costituisce, come vedremo, un **effettivo** ampliamento degli spazi $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$.

3.1 Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Diremo che $f \in \Lambda^1$ se:

$$\begin{gathered} 1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \\ \text{2) esiste } x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \end{gathered} \tag{1}$$

E' evidente che se $f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R})$ allora $f(t)e^{-xt} \in L^1(\mathbb{R})$ per ogni $x > x_0$. Si chiama *ascissa di convergenza di* f, e si indica con α_f, il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x_0 \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(t)e^{-x_0 t} \in L^1(\mathbb{R}) \right\}.$$

Ad esempio, indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

per le funzioni

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = e^{5t}u(t), & f_2(t) = tu(t), & f_3(t) = \sin t \; u(t), \\ f_4(t) = e^{-9t}u(t), & f_5(t) = u(t), & f_6(t) = u(t) - u(t-7) \end{array}$$

si ha

$$\begin{array}{l} \alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \\ \alpha_{f_4} = -9, \; \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty. \end{array}$$

Pertanto l'ascissa di convergenza può anche valere $-\infty$. Si osservi poi che la funzione $f(t) = e^{t^2}u(t)$ non appartiene a Λ^1.

Ciò premesso, si ha la seguente

Definizione. *Sia* $f \in \Lambda^1$ *e sia* α_f *la sua ascissa di convergenza . Si chiama trasformata di Laplace di* f, *e si indica con* $L[f]$, *la trasformata di Fourier di* $f(t)e^{-xt}$, *dove* $x > \alpha_f$, *ossia*

$$L[f(t)] = \mathfrak{F}\left\{ f(t)e^{-xt} \right\}. \tag{2}$$

Utilizzando la definizione di trasformata di Fourier si ottiene facilmente

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \tag{3}$$

dove s è un qualunque numero complesso con $\operatorname{Re} s = x (> \alpha_f)$.

La funzione F definita in (3) gode di alcune importanti proprietà.

Lemma. *Sia* $f \in \Lambda^1$ *e sia* $F = L[f]$. *Allora:*

(i) F è una funzione analitica in Re $s > \alpha_f$. Inoltre F ha almeno una singolarita' sulla retta $\operatorname{Re} s = \alpha_f$.

(ii) $\lim_{\operatorname{Re} s \to \infty} F(s) = 0$.

Per complementi sulla trasformata di Laplace, e per la sua definizione, si veda anche Cap. 1.1, 1.2, 1.3 del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.

3.2 Formula di Bromwich-Mellin

Vale la seguente:

Formula di Bromwich-Mellin - *Sia $f \in \Lambda^1$. Sia inoltre f sviluppabile in serie di Fourier in $[0, L], \forall L > 0$. Indicata con $F(s) = L[f(t)]$ la sua trasformata di Laplace, si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{L \to +\infty} \int_{x-jL}^{x+jL} F(s) e^{st} ds \tag{4}$$

dove $x = \operatorname{Re} s > \alpha_f$

La formula (4), nota anche sotto il nome di formula di Riemann-Fourier, può essere facilmente ottenuta dalla formula di inversione per la trasformata di Fourier e da (2). L'ipotesi "*f sviluppabile in serie di Fourier in* $[0, L], \forall L > 0$" (o equivalentemente "*f sviluppabile in serie di Fourier in* $[-L, L], \forall L > 0$") serve per poter applicare la formula di inversione della trasformata di Fourier. Si osservi che, per il Teorema di Plancherel, tale ipotesi può essere omessa quando $f(t)e^{-xt} \in L^2[0, \infty)$.

Utilizzando il Lemma di Jordan, in una forma leggermente più generale di quella ricordata nelle scorse lezioni, è possibile mostrare che il secondo membro in (4) è indipendente dalla scelta di x, purché sia $x > \alpha_f$. Si osservi poi che l'integrale in (4) può essere inteso come il valore principale di un integrale calcolato, nel piano complesso, lungo la retta Re $s = x$. Pertanto (4) può essere scritta anche nella forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} v.p. \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) e^{st} ds.$$

Nel caso in cui F sia razionale, vale il seguente risultato, la cui seconda parte sarà provata in seguito:

Teorema 3 *Sia F razionale, $F(s) = N(s)/D(s)$.*

- *Se gr $D >$ gr N allora esiste $f \in \Lambda^1$ tale che $F(s) = L[f(t)]$.*
- *Se gr $D \leq$ gr N. allora F è la trasformata di Laplace di una distribuzione.*

Utilizzando poi la teoria dei residui e il Lemma di Jordan, si puo' provare il seguente:

Teorema 4 *Sia F razionale propria, $F(s) = N(s)/D(s)$ con N, D polinomi primi tra loro con gr $N <$ gr D. Allora l'antitrasformata di Laplace di $F(s)$ è data, per $t > 0$, dalla funzione*

$$f(t) = \sum_{s_i} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_i],$$

dove s_i rappresentano TUTTI gli zeri del polinomio D, i.e. le singolarità di F.

Per maggiori chiarimenti e dettagli si veda anche Cap. 1.13.1, 1.13.2, del testo M. Marini *"Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche"*, Edizioni Cedam, 1999.