ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2013-2014
traccia della lezione del 31 marzo 2014

April 5, 2014

1 Equazioni differenziali lineari del 2 ordine: l'oscillazione

Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{1}$$

dove le funzioni a, b sono continue a tratti in un intervallo I dell'asse reale del tipo $(x_0, +\infty)$ oppure $[x_0, \infty)$. Non è escluso il caso in cui I coincida con $\mathbb{R}$, ossia che $x_0 = -\infty$. Ricordiamo la seguente definizione:

Definizione - Sia y una soluzione di (1), diversa dalla soluzione nulla; y si dice *oscillante* se esiste una successione $\{x_n\}$, con $x_n \to +\infty$, tale che $y(x_n) = 0$, ossia se y ha infiniti zeri che si "accumulano all'infinito". In caso contrario y si dice *nonoscillante.*

Poiché per (1) vale la proprietà dell'unicità della soluzione rispetto ai dati iniziali, il grafico di una soluzione oscillante di (1) "taglia" l'asse x infinite volte (per $x \to +\infty$). Ricordiamo poi il seguente:

Teorema (di Sturm) - *Tutte le soluzioni non banali di (1) hanno lo stesso carattere rispetto all'oscillazione, ossia o tutte oscillano o tutte nonoscillano.*

In virtù di tale risultato allora non possono coesistere per una stessa equazione (1) soluzioni oscillanti e nonoscillanti; pertanto (1) si dice *oscillante* o *nonoscillante* a seconda che tutte le sue soluzioni (diverse dalla soluzione nulla) siano oscillanti o nonoscillanti.

Un criterio di oscillazione è il seguente:

Teorema di Leigthon

I) Sia $b(x) \geq 0$ per ogni x grande, i.e. $x \geq \overline{x} \geq x_0$, e sia A una primitiva di a, ossia

$$A'(x) = a(x).$$

(i) L'equazione (1) è oscillante se

$$\int_{\overline{x}}^{\infty} e^{-A(x)} dx = \int_{\overline{x}}^{\infty} e^{A(x)} b(x) dx = +\infty.$$

(ii) L'equazione (1) è nonoscillante se

$$\int_{\overline{x}}^{\infty} e^{-A(x)} dx < +\infty, \qquad \int_{\overline{x}}^{\infty} e^{A(x)} b(x) dx < +\infty$$

II) Sia $b(x) \leq 0$ per ogni $x \geq \overline{x} \geq x_0$. Allora l'equazione (1) è nonoscillante.

- ESEMPI

Applicando il Teorema di Leigthon si ottiene facilmente che l'equazione

$$y'' + \frac{1}{x} y = 0. \tag{2}$$

è oscillante. Così pure è oscillante l'equazione

$$y'' + \frac{2x^2 + 1}{4x^2 + 4} y = 0.$$

Invece è nonoscillante l'equazione

$$y'' + \frac{1 - 2x^2}{4x^2 + 4} y = 0.$$

- Si consideri l'**equazione di Bessel,** ossia l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty) \tag{3}$$

dove n è un parametro reale, introdotta la scorsa lezione. Tale equazione interviene nello studio di problemi di diffusione in corpi con geometria cilindrica. Ad esempio interviene nella propagazione del calore in tubi, nella diffusione di vibrazioni in strutture cilindriche, nella vibrazione di segnali (modulazione). Utilizzando il criterio di Leigthon è facile mostrare che tale equazione è oscillante, ossia che tutte le sue soluzioni hanno infiniti zeri reali positivi (che si accumulano a $+\infty$).

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty)$$

- Un altro esempio è dato dall'**equazione di Schrödinger monodimensionale**

$$w'' + \frac{2m}{H^2}(E - V(x))w = 0 \tag{4}$$

dove :

m rappresenta la massa dell'elettrone;

H è la costante di Planck normalizzata (i.e. $H = h/(2\pi)$, $h =$ costante di Planck);

E è l'energia dell'elettrone;

V è il potenziale applicato;

w è una funzione legata alla funzione d'onda ($|w(x)|^2$ rappresenta la probabilita' che l'elettrone occupi effettivamente la posizione x).

L'equazione (4) è di tipo (1) con

$$a(x) = 0, \qquad b(x) = \frac{2m}{H^2}(E - V(x)).$$

A lezione sono stati discussi i casi:

1) **Gradino di potenziale**, ossia il caso in cui

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}, V_0 > 0,$$

e

$$V_0 > E > 0.$$

In tal caso l'equazione è nonoscillante.

2) **Barriera di potenziale**, ossia il caso in cui

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \text{ se } x \in [0, X] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}, V_0 > 0$$

e

$$V_0 > E > 0.$$

In questo caso, l'equazione di Scroedinger è oscillante.

3) **Buca di potenziale**, ossia il caso in cui

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \text{ se } x \in [0, X] \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}, V_0 < 0$$

e

$$V_0 < E < 0.$$

In questo caso l'equazione è nonoscillante, anche se non tutte le soluzioni dell'equazione modellano il problema fisico considerato.