ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2013-2014
3 e 5 marzo 2014

March 5, 2014

1 Spazi normati

Sia V uno spazio vettoriale complesso. Si chiama *norma in* V ogni applicazione $||\cdot||$

$$||\cdot|| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\begin{array}{ll} ||f|| \geq 0, = 0 \text{ se e solo se } f = \underline{0} & \forall f \in V, \\ ||\alpha f|| = |\alpha| \; ||f|| & \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in V \\ ||f+g|| \leq ||f|| + ||g|| & \forall f, g \in V \end{array}$$

e lo spazio V si chiama *spazio normato.*

Ad esempio, se V è lo spazio delle funzioni continue in $[0, T]$, ossia $V = C[0, T]$, allora è immediato verificare che sono norme in $C[0, T]$ le seguenti ($f \in C[0, T]$):

$$||f||_M = \max_{t \in [0,T]} |f(t)|$$

$$||f||_1 = \int_0^T |f(t)| dt$$

$$||f||_2 = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- **Ogni spazio normato V è anche uno spazio metrico, con distanza d data da**

$$d(f,g) = ||f-g|| \qquad\qquad (f,g \in V)$$

In riferimento all'esempio di sopra, allora in $C[0,T]$ è possibile considerare le tre distanze (metriche) $(f,g \in C[0,T])$:

$$\begin{aligned} d_M(f,g) &= ||f-g||_M = \max_{t\in[0,T]} |f(t)-g(t)| \\ d_1(f,g) &= ||f-g||_1 = \int_0^T |f(t)-g(t)|dt \\ d_2(f,g) &= ||f-g||_2 = \left(\int_0^T |f(t)-g(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Esercizio. Sia $f(t) = t(1-t), g(t) = t/2$ e sia $T = 1$. Si verifichi che in $C[0,1]$, per le distanze sopra definite si ha

$$d_M(f,g) = 1/2, \qquad d_1(f,g) = 1/8.$$

2 Richiami sul concetto di integrale improprio

Sia f una funzione reale di variabile reale, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrabile in ogni intervallo limitato e chiuso dell'asse reale. Se, **comunque** siano scelti $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, esiste finito il limite

$$\lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

e tale limite è indipendente da a, b, allora si pone

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{a\to-\infty, b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

e diremo che f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$, o, equivalentemente che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$, converge. In caso contrario diremo che f non è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ o semplicemente che f non è integrabile in $\mathbb{R}$ o, equivalentemente, che l'integrale di f, esteso a $\mathbb{R}$ non converge.

Si chiama poi *valore principale dell'integrale improprio* (in $\mathbb{R}$) e si indica con

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

il limite

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =_{def} \lim_{L \to +\infty} \int_{-L}^{+L} f(x)dx. \tag{2}$$

La relazione tra le due definizioni (1), (2) è, ovviamente, la seguente: se f è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ allora il valore principale dell'integrale improprio esiste finito e coincide con $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, ossia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \implies v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M.$$

Ovviamente NON vale il viceversa, ossia il valore principale dell'integrale improprio può essere finito, ma l'integrale (1) può non convergere, i.e.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = M \ .$$

Ad esempio per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5}{x^4+1}$$

si ha

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^5}{x^4+1} dx = 0$$

in quanto la funzione è dispari, ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ovviamente non converge (f è illimitata!).

3 Gli spazi $\mathbf{L}^p$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia p un numero reale $p \geq 1$. Scriveremo $f \in L^p(\mathbb{R})$ se $| \ f \ |^p$ è integrabile (in senso improprio) in $\mathbb{R}$ ossia se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt < \infty.$$

In particolare se $p = 1, f$ si dice *sommabile* e in tal caso scriveremo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se $p = 2$, f si dice *a quadrato sommabile* e scriveremo $f \in L^2(\mathbb{R})$. Gli spazi $L^p(\mathbb{R})$ sono spazi normati (e quindi anche metrici). In particolare la norma e la distanza in $L^1(\mathbb{R})$ sono date, rispettivamente, da $(f, g \in L^1(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt, \quad d_{L^1}(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|dt.$$

Per quanto riguarda $L^2(\mathbb{R})$, la norma e la distanza sono date da $(f, g \in L^2(\mathbb{R}))$

$$||f||_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}, \quad d_{L^2}(f,g) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Esistono funzioni appartenenti a $L^2(\mathbb{R})$, ma non a $L^1(\mathbb{R})$ e viceversa. Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{se } t \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $f \notin L^1(\mathbb{R})$. Invece per la funzione

$$g(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si ha $g \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \notin L^2(\mathbb{R})$. Chiaramente poi esistono funzioni appartenenti sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$: ad esempio la funzione

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene sia a $L^1(\mathbb{R})$ che a $L^2(\mathbb{R})$ ossia $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Vale il seguente:

Teorema *Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile reale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ .Allora l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

converge se e solo se $f \in L^1(\mathbb{R})$, ossia se e solo se f è assolutamente integrabile sull'intero asse reale.

4 Trasformata di Fourier in $\mathbf{L}^1$

Sia f una funzione (reale o complessa) di variabile **reale** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sommabile, ossia $f \in L^1(\mathbb{R})$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty;$$

ciò posto, si chiama *Trasformata di Fourier (in L^1)* di f la funzione F definita da

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \tag{3}$$

dove ω è un numero reale fissato.

- La definizione (3) è lecita, nel senso che l'integrale in (3) converge per ogni ω reale.
- Utilizzando le formule di Eulero si ha:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \omega t \ dt}_{(*)} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \omega t \ dt}_{(+)}$$

  $(*)$ si chiama *Trasformata coseno di Fourier* e $(+)$ *Trasformata seno di Fourier.*

5 Antitrasformata

Vale il seguente teorema.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si supponga inoltre che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L. Ciò premesso si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \tag{4}$$

La formula (4) è detta formula dell'antitrasformata di Fourier.

Si osservi che (3) è una definizione e vale sotto la sola condizione $f \in L^1(\mathbb{R})$. La formula dell'antitrasformata (4) è invece conseguenza di un Teorema e richiede una condizione aggiuntiva, ossia che f sia sviluppabile in serie di Fourier nell'intervallo chiuso $[-L, L]$, qualunque sia L.

6 Prime proprietà della trasformata di Fourier

Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e sia F la sua trasformata di Fourier. Allora:

1. S*e f è pari, allora F è pari.*
2. S*e f è dispari; allora F è dispari.*
3. *Se f è reale, allora $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$.*
4. *Se f è reale e pari, allora F è reale e pari.*

Se f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni intervallo chiuso $[-L, L]$ e $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora valgono anche le relazioni inverse. Precisamente:

5. S*e F è pari, allora f è pari.*
6. S*e F è dispari; allora f è dispari.*
7. *Se F è reale, allora $f(-t) = \overline{f(t)}$.*
8. *Se F è reale e pari, allora f è reale e pari.*

7 Altre proprietà

Indichiamo con $\mathfrak{F}$ l'operatore che associa a $f(\in L^1(\mathbb{R}))$ la sua trasformata di Fourier F, ossia $\mathfrak{F}\{f\} = F$. Ciò premesso si ha:

Teorema. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$; allora la sua trasformata F è una funzione continua e infinitesima per $|\omega| \to \infty$.*

Corollario. *La trasformata di Fourier F di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ è una funzione limitata per ogni $\omega \in \mathbb{R}$.*

Ad esempio non sono trasf. di Fourier (di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$!) le funzioni

$$F_1(\omega) = \frac{\omega^2 + 12}{\omega^2 + 4}; F_2(\omega) = \frac{\omega + 12}{\omega^2 - 4}.$$

La trasformata di Fourier F di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$ puo' non essere derivabile. Esempi in tal senso saranno visti nelle prossime lezioni. Se, all'ipotesi

$f \in L^1(\mathbb{R})$ aggiungiamo anche $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$ allora la risposta è affermativa, come segue subito dal seguente risultato.

Teorema *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$; allora la trasformata di Fourier F di f è di classe C^1 e si ha:*

$$\mathfrak{F}\{tf(t)\} = j\frac{d}{d\omega}F(\omega).$$

Si osservi che le due ipotesi "$f \in L^1(\mathbb{R})$" e "$tf(t) \in L^1(\mathbb{R})$" sono tra loro indipendenti. Infatti, ad esempio, per la funzione f, data da

$$f(t) = \begin{cases} 1/t^2 & \text{se } t > 1 \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha $f \in L^1(\mathbb{R})$" e "$tf(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, mentre per la funzione g, data da

$$g(t) = \begin{cases} 1/t & \text{se } t \in (0,1) \\ \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

si ha "$g \notin L^1(\mathbb{R})$" e "$tg(t) \in L^1(\mathbb{R})$" .

Si osservi inoltre che tale teorema fornisce solo una condizione sufficiente.

Dal teorema precedente seguono poi i seguenti:

Corollario 1 *Sia $t^n f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per $n = 0, 1, ..., N$. Allora la trasformata di Fourier F di f è una funzione di classe $C^N(\mathbb{R})$.*

Corollario 2 *Sia f a supporto compatto, i.e. esiste un intervallo compatto $[a, b]$ tale che $f(t) = 0$ se $t \notin [a, b]$. Sia f assolutamente integrabile in $[a, b]$. Allora f è trasformabile secondo Fourier e la sua trasformata F è una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$.*

Si osservi che tali corollari forniscono solo condizioni sufficienti. Ad esempio la trasformata F puo' essere di classe C^∞ $(\mathbb{R})$ anche se f non è a supporto compatto. Un esempio in tal senso è dato dall'impulso esponenziale, che sarà trattato nella prossima sezione.

8 Esempi

▲ **Impulso Rettangolare** - Sia

$$f_R(t) = \begin{cases} M \text{ se } |t| \leq L \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_R(\omega) = 2ML\mathrm{sink}(\omega L) = \begin{cases} 2M\omega^{-1}\sin(\omega L) & \text{se } \omega \neq 0 \\ \\ 2ML & \text{se } \omega = 0 \end{cases}.$$

Si osservi che F_R è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_R \in C^\infty(\mathbb{R})$, ma $F_R \notin L^1(\mathbb{R})$. Quindi, in generale, in $L^1(\mathbb{R})$ la trasformata di Fourier non può essere iterata.

▲ **Impulso Triangolare** - Sia

$$f_T(t) = \begin{cases} M(t+1) & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ M(1-t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_T(\omega) = \frac{2M(1-\cos\omega)}{\omega^2} \text{per } \omega \neq 0, F_T(0) = M.$$

ossia, usando le formule di duplicazione del coseno,

$$F_T(\omega) = M\left(\mathrm{sink}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^2.$$

Si osservi che F_T è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_T \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_T \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso gaussiano** - Sia

$$f_G(t) = \exp(-t^2/2);$$

la sua trasformata di Fourier è la funzione

$$F_G(\omega) = \sqrt{2\pi}\exp((-\omega^2/2).$$

Anche in questo caso F_G è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_G \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $F_G \in L^1(\mathbb{R})$.

▲ **Impulso esponenziale** - Sia

$$f_E(t) = \exp(-|t|);$$

ovviamente $f_E \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha con facili calcoli, utilizzando le proprietà dell'esponenziale in $\mathbb{C}$ (vedi paragrafo seguente)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Pertanto la trasformata di Fourier di f_E è la funzione

$$F_E(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Si osservi che F_E è continua, infinitesima per $|\omega| \to \infty$, $F_E \in L^1(\mathbb{R})$ e $F_E \in C^\infty(\mathbb{R})$.

9 Derivazione

Teorema (Derivazione) *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R})$. *Allora*

$$\mathfrak{F}\{f'\} = j\omega \mathfrak{F}\{f\}.$$

Tale risultato può essere provato integrando per parti l'integrale

$$\mathfrak{F}\{f'\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-j\omega t} dt$$

e usando la proprietà:

$$f \in L^1(\mathbb{R}), f' \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow \lim_{|t| \to +\infty} f(t) = 0.$$

Si osservi che l'ipotesi "$f \in C^1(\mathbb{R})$" nel precedente Teorema non può essere tralasciata, come mette in luce l'esempio dell'impulso rettangolare.

10 APPENDICE

In questa parte vengono brevemente presentati alcuni richiami

a) sui numeri complessi

b) sulle funzioni complesse e la teoria dei Residui.

tali argomenti sono già stati trattati in corsi precedenti, ad esempio nel corso di Applicazioni di Matematica. Per maggiori dettagli si rimanda a tale corso e alle tracce delle lezioni di Applicazioni di Matematica in questo stesso sito. Si raccomanda di prendere familiarita' con i concetti qui presentati, anche svolgendo gli esercizi finali.

11 Richiami sui numeri complessi

11.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j, detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \mathrm{Re}z, b = \mathrm{Im}z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale.* Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario.*

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a+jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* z, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A, il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Si chiama poi *modulo di* z, e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z$:

$$\begin{aligned} z\ \bar{z} &= |z|^2 \\ \mathrm{Re}z &= (z + \bar{z})/2 \\ \mathrm{Im}z &= (z - \bar{z})/2j. \end{aligned}$$

11.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned} z + s &= (a + c) + (b + d)j \\ z - s &= (a - c) + (b - d)j \\ zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\ \frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \text{ (se } s \neq 0). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi.

11.3 Norma e distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio normato con norma data dal modulo, i.e. se $z = a + jb$ allora

$$||z|| = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Pertanto $\mathbb{C}$ è anche uno spazio metrico, dove la distanza $d(z,s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z,s) = ||z-s|| = |z-s|.$$

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z-z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ.

Così, ad esempio,

$$|z-3+2j| < 1, \tag{5}$$

avendosi

$$|z-3+2j| = |z-(3-2j)|$$

(5) rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $z_0 = 3-2j$ e raggio 1, mentre

$$|z+j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

11.4 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di* z, e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a+jb$, indicando con ρ il modulo di z, risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$$

Le formule di passaggio sono quindi:

$$\begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

11.5 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del prodotto e del rapporto di tali due numeri ($s_1, s_2 \neq 0$). Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica: $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$, si ha

$$
\begin{aligned}
s_1 s_2 &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)] \\
\frac{s_1}{s_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)].
\end{aligned}
$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$\left(\sqrt{3} + j\right)^6 = -64.$$

11.6 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^i}{i!} + ...$$

Tale definizione è l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:

2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:

3. $e^{jy} = \cos y + j\sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j\sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

Pertanto
$$e^s = e^x \cos y \; + \; j \; e^x \sin y.$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} |e^s| = e^x = e^{\mathrm{Re} s},\ \mathrm{Arg}(e^s) = y = \mathrm{Im}(s), \\ \mathrm{Re}\, e^s = e^x \cos y = e^{\mathrm{Re}\, s} \cos \mathrm{Im}\, s, \\ \mathrm{Im}\, e^s = e^x \sin y = e^{\mathrm{Re}\, s} \sin \mathrm{Im}\, s \end{aligned}$$

4. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

5. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

11.7 Esercizi

ESERCIZIO 1 - Determinare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$\begin{aligned} &3j; -2;\ 1+j;\ \ -1-j;\ 1+j\sqrt{3};\ 3-j\sqrt{3};\ \ -j\sqrt{5}; \\ &(1+j)(1-j); (1+j\sqrt{3})(-1+j);\ \ -2+5j. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2 - Utilizzando le formule di De Moivre, calcolare:

$$\left(\frac{1-j}{1+j}\right)^8;\ \frac{(3+3j)^9}{j^6};\ \left(\frac{5j}{5+5j}\right)^9.$$

ESERCIZIO 3 - Sia

$$\begin{aligned} &z_1 = e^{5j},\ z_2 = e^{1+\pi j}, z_3 = e^{-2\pi(j+4)}, z_4 = e^{j\pi/2} e^j, \\ &z_5 = 1 + je^{j2\pi}, z_6 = e^j/e^{-3j}, z_7 = 5e^{-j}/e^j. \end{aligned}$$

Per ciascun z_i, $(i = 1,..,7)$ calcolare Re z_i, Im z_i, $|z_i|$, Arg z_i.

12 Funzioni complesse : generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = s^2 + 1$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 1, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

Ad esempio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 7js + s^2 \\ f_2(s) &= s + |s|^2 \\ f_3(s) &= (5j - 1)s \\ f_4(s) &= |s| - 5j \end{aligned}$$

13 Curva regolare in $\mathbb{C}$

Sia $[a, b]$ un intervallo **limitato e chiuso** della retta reale. Una *curva regolare* è una funzione $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\gamma(t) = x(t) + jy(t)$$

dove le funzioni reali $x = x(t), y = y(t)$ sono funzioni derivabili con derivata continua nell'intervallo aperto (a, b) [i.e. $x, y \in C^1(a, b)$] e le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ non si annullano contemporaneamente in (a, b).

Tale concetto è del tutto analogo a quello visto nell'ambito dei corsi di Analisi Matematica, con la sola differenza che ora esso è formulato usando le notazioni complesse.

Se le due funzioni x, y sono di classe C^1 in tutto (a, b) eccetto un numero finito di punti e/o le due derivate $x'(t)$ e $y'(t)$ si annullano contemporaneamente in un numero finito di punti, allora γ si dice *generalmente regolare*.

Geometricamente una curva regolare è rappresentata da una "linea" (detta *sostegno della curva*) avente tangente in ogni punto, salvo, al piu', gli estremi; una curva generalmente regolare è invece rappresentata da una "linea" che ammette tangente in ogni punto eccetto un numero finito di punti.

Esempio. La curva

$$\gamma(t) = \rho e^{jt} + s_0, t \in [0, 2\pi]$$

rappresenta una circonferenza di centro s_0, raggio ρ e percorsa in senso antiorario. Infatti ponendo $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $s_0 = x_0 + jy_0$ e utilizzando le formule di Eulero si ottiene

$$x(t) + jy(t) = \rho[\cos t + j \sin t] + x_0 + jy_0$$

da cui, uguagliando parte reale e parte immaginaria di ambo i membri, si ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \rho \cos t + x_0 \\ y(t) &= \rho \sin t + y_0 \end{aligned}$$

che, come è noto, è l'equazione in forma parametrica di una circonferenza di centro (x_0, y_0), raggio ρ e percorsa in senso antiorario (per $t \in [0, 2\pi]$).

Una curva γ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva γ si dice *semplice* se presi $t_1, t_2 \in (a, b)$ con $t_1 \neq t_2$ risulta $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$.

14 Definizione di Integrale in $\mathbb{C}$

Sia γ una curva regolare o generalmente regolare e sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua sulla curva. Si chiama *integrale di f esteso a γ* il numero complesso

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

15 Teorema di Cauchy

Sia H la funzione
$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}, \tag{6}$$
dove N e D sono polinomi primi tra loro e α è un numero complesso fissato. Utilizzando il Teorema di Cauchy, visto nel corso di Applicazioni di Matematica e al quale si rimanda, si ottiene il seguente:

Teorema *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare) semplice e chiusa e percorsa in senso positivo (antiorario). Sia la funzione H, definita in (6), continua sulla curva Γ (ossia $D(s) \neq 0$ se $s \in \Gamma$). Siano poi $s_1, s_2, ..s_N$ gli zeri del polinomio D* ***interni*** *alla curva Γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_\Gamma H(s)ds = Res[H, s_1] + Res[H, s_2] + ... + Res[H, s_N]$$

dove la scrittura $Res[H, s_i]$ indica il Residuo di H in s_i.

Il $Res[H, s_i]$ è stato definito nell'ambito del corso di Applicazioni di Matematica al quale si rimanda. Qui ricordiamo soltanto le formule per il calcolo di tale Residuo nel caso particolare considerato.

- **Se s_0 è una radice semplice di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} (s - s_0) \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s}.$$

- **Se s_0 è una radice doppia di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{d}{ds} \left[(s - s_0)^2 \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

- **In generale, se s_0 è una radice di ordine $n > 1$ di D, allora**

$$Res[H(s), s_0] = \lim_{s \to s_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left[(s - s_0)^n \frac{N(s)}{D(s)} e^{\alpha s} \right].$$

Esercizio - Per le funzioni

$$f_1(s) = \frac{s^2-1}{s^2+1}; \qquad f_2(s) = \frac{7s^3+6}{s^2+5s+4}; \qquad f_3(s) = \frac{se^{5s}}{s^2-1}$$
$$f_4(s) = \frac{3se^{-2s}}{s^3+6s^2+5s}; \qquad f_5(s) = \frac{s}{(s+j)^2}; \qquad f_6(s) = \frac{e^s}{(s+1)^2}.$$

calcolare

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma f_i(s)ds$$

dove γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa in senso positivo (antiorario).