

ANALISI MATEMATICA III

A.A. 2013-2014

Traccia della lezione del 14 aprile 2014

April 16, 2014

1 L'equazione di Bessel (n intero positivo)

Come detto in una precedente lezione, si chiama **equazione di Bessel** l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (\text{B})$$

dove n è un parametro reale.

Nel caso particolare in cui n sia un intero nonnegativo, si può dimostrare che tra le soluzioni di (B) vi sono le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (1)$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie* e godono delle seguenti proprietà:

1. se n è pari, allora J_n è una serie di polinomi pari;
2. se n è dispari, allora J_n è una serie di polinomi dispari;
3. $J_0(0+) = 1$; $J_n(0+) = 0$ per n intero, $n \geq 1$.
4. Le funzioni J_n sono funzioni oscillanti, ossia hanno infiniti zeri reali positivi che si accumulano a $+\infty$. Inoltre per $x \rightarrow +\infty$ sono funzioni "smorzate", i.e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x) = 0$.

2 La funzione Gamma Euleriana

Si chiama *Gamma Euleriana* la funzione

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Tale integrale converge per ogni valore positivo del parametro reale x e quindi la funzione Gamma Euleriana è definita in $(0, \infty)$. Essa gode delle seguenti proprietà (di immediata verifica):

1. $\Gamma(1) = 1$;
2. $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ (e quindi $\Gamma(2) = 1$);
3. $\Gamma(x + 2) = x(x + 1)\Gamma(x)$;
4. $\Gamma(x + 3) = x(x + 1)(x + 2)\Gamma(x)$;
-
5. $\Gamma(x + n) = x(x + 1)\dots(x + n - 1)\Gamma(x)$;

Ponendo in quest'ultima uguaglianza $x = 1$, si ottiene l'importante proprietà

$$\Gamma(n + 1) = n!$$

ossia **la funzione Gamma Euleriana è l'estensione al caso continuo del concetto di fattoriale.**

Come conseguenza delle relazioni 1) ,...5) si ha che la funzione Γ è nota, quando siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1]$. Infatti se Γ è nota in $(0, 1]$, usando 2) si ottiene che Γ è nota anche in $(1, 2]$. Usando poi 3) si ottiene che Γ è nota anche in $(2, 3]$, e così via. Tale risultato puo' essere migliorato. Infatti è possibile provare che per $x \in (0, 1/2]$ vale la relazione

$$\Gamma(x)\Gamma(1 - x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

e da tale relazione ne segue che se Γ è nota in $(0, 1/2]$, allora Γ è nota anche in $[1/2, 1)$.

In conclusione:

I valori della funzione Γ sono noti, non appena siano noti i valori che Γ assume in $(0, 1/2]$.

Per tale motivo i valori di Γ vengono usualmente tabulati per $x \in (0, 1/2]$.

Usando le relazioni 2), ...5) è possibile poi estendere la definizione della funzione Γ anche sul semiasse negativo, ad eccezione dei punti $0, -1, -2, -3, \dots$. Infatti da 2) si ha per $x \neq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1);$$

poichè il secondo membro ha senso anche per $x \in (-1, 0)$ si può usare tale relazione per estendere la definizione di Γ anche all'intervallo $(-1, 0)$. In altre parole si pone

$$\Gamma(x) =_{\text{def}} \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \quad \text{se } x \in (-1, 0).$$

Usando poi le relazioni 3)..5) si può procedere nell'estensione della definizione di Γ sul semiasse negativo. Precisamente si ha

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)} \Gamma(x+2) && \text{se } x \in (-2, -1) \\ \Gamma(x) &=_{\text{def}} \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \Gamma(x+3) && \text{se } x \in (-3, -4) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si osservi infine che per quanto riguarda il comportamento della funzione Γ nei punti $x = 0, x = -1, x = -2, \dots$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -n} |\Gamma(x)| = +\infty \tag{2}$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$

3 Funzioni di Bessel (caso n reale)

Indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{3}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad x \in (0, +\infty) \quad (\text{B})$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie*. Se n è intero positivo, poiché $\Gamma(k + n + 1) = (n + k)!$, l'espressione (3) si riduce a quella vista in precedenza.

Nel caso particolare in cui n sia un intero negativo, i primi n termini della serie (3) sono nulli, in quanto $|\Gamma(k + n + 1)| = +\infty$. Ad esempio, per $J_{-7}(x)$ si ha

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}. \quad (4)$$

Poiché $|\Gamma(k-6)| = +\infty$ se $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, i primi 7 termini di (4) sono nulli e quindi la somma in tale serie inizia effettivamente da $k = 7$, ossia

$$J_{-7}(x) = \sum_{k=7}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-6)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-7}.$$

Vale il seguente:

Teorema

- (i) Fissato $n \in \mathbb{R}$ le funzioni J_n e J_{-n} sono entrambe soluzioni di (B).
- (ii) Se n è intero, i.e. $n \in \mathbb{Z}$, allora

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

e quindi J_n e J_{-n} sono soluzioni linearmente dipendenti.

- (iii) Se n è reale, ma non intero, i.e. $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, allora J_n e J_{-n} sono soluzioni linearmente indipendenti.

Pertanto se $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ricordando che lo spazio delle soluzioni di (B) ha dimensione 2, dal Teorema precedente (punto (iii)) si ha che tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$c_1 J_n(x) + c_2 J_{-n}(x), \quad (5)$$

dove $c_i, i = 1, 2$ sono due opportune costanti reali.

Scegliendo poi in (5)

$$c_1 = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sin \pi n}$$

si ottiene la soluzione di (B) data da

$$Y_n(x) = \frac{\cos \pi n}{\sin \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin \pi n} J_{-n}(x) \quad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}).$$

Le funzioni Y_n si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* (o anche *funzioni di Neumann*) e, per quanto appena detto, sono anch'esse soluzioni di (B).

Nel caso infine in cui n sia intero, si definiscono le funzioni di Bessel di seconda specie nel modo seguente:

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \left(\frac{\cos \pi p}{\sin \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin \pi p} J_{-p}(x) \right) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

e si può provare che anche in tal caso le funzioni Y_n sono soluzioni di (B).

Inoltre le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n sono linearmente indipendenti da J_n , sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pertanto per ogni n reale tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x).$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

Per $x \rightarrow +\infty$ valgono le seguenti formule asintotiche:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin \left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

Infine, nel caso $n = 1/2$ è possibile provare che

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x;$$

pertanto gli zeri di $J_{1/2}$ coincidono con quelli della funzione $\sin x$, mentre quelli di $J_{-1/2}$ con la funzione $\cos x$.