ANALISI MATEMATICA III
ELM+TEM
A.A. 2013-2014
Traccia della lezione del 28 aprile 2014

April 28, 2014

1 Funzioni di Bessel

Ricordiamo che, indicata con Γ la funzione Gamma Euleriana, per ogni $n \in \mathbb{R}$ le funzioni

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \tag{1}$$

sono soluzioni dell'equazione di Bessel

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0, \qquad x \in (0, +\infty). \tag{B}$$

Le funzioni J_n sono chiamate *funzioni di Bessel di prima specie.* Ricordiamo poi che si chiamano *funzioni di Bessel di seconda specie* (o *funzioni di Neumann*) le funzioni

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \frac{\cos\ \pi n}{\sin\ \pi n} J_n(x) - \frac{1}{\sin\ \pi n} J_{-n}(x) \qquad (n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}), \\ Y_n(x) &= \lim_{p \to n} \left(\frac{\cos\ \pi p}{\sin\ \pi p} J_p(x) - \frac{1}{\sin\ \pi p} J_{-p}(x) \right) \qquad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Anche le funzioni Y_n sono soluzioni di (B) e sono linearmente indipendenti da J_n, sia nel caso n intero che nel caso $n \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Pertanto per ogni n reale

tutte le soluzioni di (B) sono date dall'espressione

$$d_1 J_n(x) + d_2 Y_n(x),$$

dove d_1 e d_2 sono due arbitrarie costanti reali.

Infine si chiamano *funzioni di Hankel (* oppure *funzioni di Bessel di terza specie)*, le funzioni $H_n^{\pm}$ date da

$$H_n^{\pm}(x) = J_n(x) \pm jY_n(x),$$

dove j rappresenta l'unità immaginaria. Pertanto $\operatorname{Re} H_n^{\pm} = J_n$ e $\operatorname{Im} H_n^{\pm} = \pm Y_n$.

2 Funzioni di Bessel - Relazioni di ricorrenza

Per le funzioni di Bessel valgono le seguenti formule:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^n J_n(x)\right) &= x^n J_{n-1}(x) \\ \frac{d}{dx}\left(x^{-n} J_n(x)\right) &= -x^{-n} J_{n+1}(x)\end{aligned}$$

Da tali formule si ottengono poi le cosidette *formule di ricorrenza:*

$$\begin{aligned}x{J_n}'(x) &= xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \\ x{J_n}'(x) &= nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \\ 2{J_n}'(x) &= J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \\ 2nJ_n(x) &= xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x). \qquad (2)\end{aligned}$$

Le precedenti formule continuano a valere anche per le funzioni di Bessel di seconda specie Y_n.

Esercizio 1. Provare che

$$\begin{aligned}\text{i)}\quad J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \\ \text{ii)}\quad J_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.\end{aligned}$$

Proviamo (i). Dalla definizione di $J_{1/2}$ si ottiene

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(3/2)}(x/2)^{1/2} - \frac{1}{1!\Gamma(5/2)}(x/2)^{5/2} + \frac{1}{2!\Gamma(7/2)}(x/2)^{9/2} + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Usando le relazioni $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ e $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, viste nelle scorse lezioni, si ottiene

$$\begin{aligned} \Gamma(3/2) &= \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = (1/2)\sqrt{\pi} \\ \Gamma(5/2) &= \frac{3}{2}\Gamma(3/2) = (1/2)(3/2)\sqrt{\pi} \\ \Gamma(7/2) &= \frac{5}{2}\Gamma(5/2) = (1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo in (3)

$$J_{1/2}(x) = \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} - \frac{(x/2)^{5/2}}{1!(1/2)(3/2)\sqrt{\pi}} + \frac{(x/2)^{9/2}}{2!(1/2)(3/2)(5/2)\sqrt{\pi}} + \ldots\ldots$$

da cui

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \ldots\ldots\right) = \\ &= \frac{1}{x}\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots\ldots\right) = \\ &= \frac{1}{x}\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} \sin x \end{aligned}$$

e l'asserto segue osservando che

$$\frac{1}{x}\frac{(x/2)^{1/2}}{(1/2)\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

Esercizio 2. Utilizzando l'Esercizio 1 e le formule di ricorrenza (2) provare che

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x - x\cos x}{x} \right)$$
$$J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{x\sin x + \cos x}{x} \right)$$

3 Formule asintotiche

Per $x \to +\infty$ valgono le seguenti formule asintotiche:

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Per $x \to 0^+$ valgono invece le seguenti formule asintotiche

$$J_n(x) \sim \frac{1}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

e

$$Y_n(x) \sim \begin{cases} 2\pi^{-1}\log(x/2) & (n = 0) \\ -2^n\pi^{-1}x^{-n}\Gamma(n) & (n > 0) \end{cases}.$$

4 Ortogonalità delle funzioni di Bessel

Come sappiamo, le funzioni J_n sono funzioni oscillanti, ossia hanno infiniti zeri reali positivi che si accumulano a $+\infty$. **Fissato** n, siano

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$$

tali zeri, con $\lim_k \lambda_k = +\infty$. Consideriamo poi le funzioni di Bessel modificate

$$J_n(\lambda_1 x), J_n(\lambda_2 x), J_n(\lambda_3 x), ..., J_n(\lambda_k x), ...$$

Tali funzioni sono "ortogonali" in $(0, 1)$ rispetto al peso x, ossia

$$\int_0^1 x J_n(\lambda_s x) J_n(\lambda_r x) dx = 0 \quad (\lambda_s \neq \lambda_r). \tag{4}$$

Poiché

$$xJ_n(\lambda_s x)J_n(\lambda_r x) = \left[x^{1/2}J_n(\lambda_s x)\right]\left[x^{1/2}J_n(\lambda_r x)\right],$$

la proprietà (4) si esprime anche dicendo semplicemente che le funzioni

$$\left\{x^{1/2}J_n(\lambda_k x)\right\}$$

sono "ortogonali" in $(0, 1)$.