

**ANALISI MATEMATICA III**  
**ELM+TEM**  
**A.A. 2013-2014**  
Traccia della lezione del 30 aprile 2014

April 30, 2014

## 1 Le distribuzioni - Definizione

Indichiamo con  $L^1_{loc}$  lo spazio vettoriale

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni compatto di } \mathbb{R}\};$$

vogliamo costruire un'estensione di tale spazio. [Il caso in cui  $f$  assuma valori in  $\mathbb{C}$ , ossia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , può essere trattato in modo simile]

Ricordiamo che una funzione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *a supporto compatto* se esiste un intervallo compatto (i.e. limitato e chiuso)  $[a, b]$  dell'asse reale tale che  $\varphi(t) = 0$  se  $t \notin [a, b]$ . L'intervallo  $[a, b]$ , all'esterno del quale  $\varphi$  è nulla, si chiama *supporto di*  $\varphi$ . E' evidente che la funzione  $\varphi$  è univocamente individuata non appena siano noti i valori assunti da  $\varphi$  sul supporto.

Si consideri poi lo spazio vettoriale  $D$  formato da tutte le funzioni reali (di variabile reale) infinitamente derivabili e a supporto compatto, ossia

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni test* ed è possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza (vedi Appendice).

Si osservi poi che il supporto dipende dalla funzione  $\varphi$  considerata. Ad esempio la funzione  $\alpha$  data da

$$\alpha(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{se } |t| < 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

appartiene a  $D$  ed il suo supporto è  $[-1, 1]$ . Analogamente la funzione  $\beta$  data da

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{-1/(4-t^2)} & \text{se } |t| < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a  $D$  ed il suo supporto è  $[-2, 2]$ .

Ciò premesso si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali (vedi Appendice) lineari e continui definiti su  $D$ . Tale spazio si indica con il simbolo  $\mathfrak{D}$  ossia

$$\mathfrak{D} = \{T : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto  $T \in \mathfrak{D}$  se :

- 1)  $T$  è un funzionale, i.e.  $T : D \rightarrow \mathbb{R}$
- 2)  $T$  è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

- 3)  $T$  è continuo, ossia se  $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$ , allora  $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$ .

## 2 Esempi

Sono elementi di  $\mathfrak{D}$  (e quindi distribuzioni) i seguenti funzionali (dove  $\varphi$  indica una generica funzione di  $D$ ):

1.  $T_{\sin t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin t \varphi(t) dt$
2.  $T_{t^3}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} t^3 \varphi(t) dt$
3.  $T_{e^t}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} e^t \varphi(t) dt.$

In generale, **fissata** una funzione  $f \in L^1_{loc}$ , sono elementi di  $\mathfrak{D}$  i funzionali del tipo

4.  $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt,$

dove  $\varphi$  indica, come prima, una generica funzione di  $D$ .

Altre distribuzioni (i.e. elementi di  $\mathfrak{D}$ ) sono poi i funzionali

5.  $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

6.  $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

dove  $a$  è un generico numero reale e  $\varphi$  è una generica funzione di  $D$ .

Usualmente i funzionali  $\Delta_0, \Delta_a$  vengono indicati con i simboli  $\delta(t), \delta(t-a)$ .

In riferimento all'Esempio 1., il valore  $T_{\sin t}(\varphi)$ , assunto dal funzionale  $T$ , viene indicato con

$$T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle.$$

Il simbolo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si chiama *crochet*; e la scrittura  $\langle \sin t, \varphi(t) \rangle$  si legge *crochet tra  $\sin t$  e  $\varphi$* .

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., 4. si indicano anche con i simboli

1.  $T_{\sin t}(\varphi) = \langle \sin t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} \sin t \varphi(t) dt$

2.  $T_{t^3}(\varphi) = \langle t^3, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} t^3 \varphi(t) dt$

3.  $T_{e^t}(\varphi) = \langle e^t, \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} e^t \varphi(t) dt.$

4.

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt, \quad (1)$$

dove  $f$  è una fissata funzione in  $\in L_{loc}^1$ .

Analogamente per le distribuzioni  $\delta(t)$  e  $\delta(t-a)$  si ha

5.

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

6.

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

### 3 Le distribuzioni come estensione dello spazio

$$L_{loc}^1$$

Mostriamo che lo spazio  $\mathfrak{D}$  è una estensione dello spazio

$$L_{loc}^1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ assolutamente integrabile in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

Ricordiamo che in tale spazio due funzioni  $f, g$ , coincidono in  $L_{loc}^1$  se

$$f(t) = g(t), \quad \text{eccetto un insieme di misura nulla.}$$

Ciò premesso si ha il seguente:

**Teorema** - Siano  $f, g \in L_{loc}^1$ . Se

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \quad (2)$$

(ossia, usando la notazione con il crochet, se

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle g(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in D ) \quad (3)$$

allora  $f$  e  $g$  coincidono in  $L_{loc}^1$ . Vale poi, ovviamente, il viceversa, ossia se  $f$  e  $g$  coincidono in  $L_{loc}^1$ , allora (2) [i.e.(3)] è soddisfatta.

Da questo risultato ne segue che le distribuzioni  $T \in \mathfrak{D}$ , definite tramite funzioni di  $L_{loc}^1$ , ossia le distribuzioni  $T \in \mathfrak{D}$  il cui crochet è dato da (1) sono "tante quanti gli elementi di  $L_{loc}^1$ ".

In altre parole, se indichiamo con  $\mathfrak{D}^*$  il sottoinsieme di  $\mathfrak{D}$  formato da tutte le distribuzioni "definite tramite funzioni di  $L_{loc}^1$ ", ossia il cui crochet è dato da (1), i.e.

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} : \exists f \in L_{loc}^1 : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt \quad \forall \varphi \in D \right\},$$

per il Teorema precedente, il sottospazio  $\mathfrak{D}^*$  è in corrispondenza biunivoca con  $L_{loc}^1$ , ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L_{loc}^1$$

Quindi lo spazio delle distribuzioni  $\mathfrak{D}$  può essere interpretato come una estensione di  $L_{loc}^1$ .

In altre parole, **ogni**  $f \in L_{loc}^1$  può essere pensata come distribuzione (precisamente quella il cui crochet è definito da (1)).

Non è difficile poi provare che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio  $\delta(t), \delta(t-a)$ , che **non** possono essere definite tramite funzioni di  $L_{loc}^1$ , e quindi che **non** appartengono a  $\mathfrak{D}^*$  (vedi Appendice).

Pertanto si ha

$$L_{loc}^1 \sim \mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}$$

i.e.  $\mathfrak{D}^*$  è strettamente contenuto in  $\mathfrak{D}$ , in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni  $\delta(t), \delta(t-a)$ , prima considerate, non sono elementi di  $\mathfrak{D}^*$ .

## 4 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni, in particolare quelle che non "provengono" da funzioni di  $L_{loc}^1$ , è utile introdurre in  $\mathfrak{D}$  una nozione di convergenza. Precisamente diremo che *una successione di distribuzioni*  $\{T_n\}$  *converge in*  $\mathfrak{D}$  *ad una distribuzione*  $T$  *se la successione numerica*  $\{T_n(\varphi)\}$  *converge a*  $T(\varphi)$  *per ogni*  $\varphi \in D$ ; ossia

$$\{T_n\} \xrightarrow{D} T \quad \text{se} \quad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \stackrel{(*)}{=} T \quad \text{se} \quad \lim_n T_n(\varphi) \stackrel{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D.$$

dove il simbolo  $(*)$  significa che il limite è effettuato in  $\mathfrak{D}$ . Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

**Teorema** - *Ogni distribuzione è limite (in*  $\mathfrak{D}$ ) *di una successione di elementi di*  $L_{loc}^1$ , *ossia*

$$\overline{L_{loc}^1} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per **ogni**  $T \in \mathfrak{D}$ , esiste una successione  $\{f_n(t)\}$ , contenuta in  $L_{loc}^1$ , che converge in  $\mathfrak{D}$  (nel senso sopra specificato) alla distribuzione  $T$ .

Ad esempio, nel corso della lezione si è provato che la distribuzione  $\delta(t)$  è il limite (in  $\mathfrak{D}$ ) della successione  $\{k_n(t)\}$ , dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altre parole la successione  $\{k_n(t)\}$  converge, **nel senso delle distribuzioni**, alla distribuzione  $\delta(t)$ , i.e.:

$$\delta(t) \stackrel{(*)}{=} \lim_n k_n(t)$$

dove  $(*)$  significa, come appena detto, che il limite è effettuato in  $\mathfrak{D}$ .

## 5 Appendice

### 5.1 Convergenza nello spazio delle funzioni test

La nozione di convergenza nello spazio  $D$  delle funzioni test si definisce nel seguente modo: diremo che una successione  $\{\varphi_n\}$  converge a  $\varphi$  se:

- 1)  $\varphi_n, \varphi \in D$ ;
- 2) esiste un intervallo limitato e chiuso  $I = [a, b]$  tale che  $\varphi_n(t) = \varphi(t) = 0$  se  $t \notin I$ ;
- 3) la successione  $\{\varphi_n^{(i)}\}$  converge uniformemente a  $\varphi^{(i)}$  in  $\mathbb{R}$  per  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$

ossia fissato  $\varepsilon > 0$  e fissato  $i = 0, 1, 2, \dots$   $\exists n(\varepsilon, i)$  (**indipendente da  $t$** ) tale che per ogni  $n > n(\varepsilon, i)$  si ha  $|\varphi_n^{(i)}(t) - \varphi^{(i)}(t)| < \varepsilon \forall t \in I$ .

### 5.2 Funzionale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale; si chiama *funzionale in  $V$*  ogni funzione  $F$  definita in  $V$  e a valori in  $\mathbb{R}$ , i.e.

$$F : V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ad esempio se  $V$  è lo spazio delle funzioni continue in  $[0, 1]$ , sono funzionali in  $V$  i seguenti (dove  $x = x(t)$  indica una generica funzione continua in  $[0, 1]$ ):

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^1 x(s) ds \\ F_2(x) &= \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \\ F_3(x) &= 437x(0) + 567x(1) \end{aligned}$$

Tale funzionale poi è lineare se è verificata la relazione

$$F(cx_1 + dx_2) = cF(x_1) + dF(x_2), \quad \forall c, d \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in V.$$

### 5.3 Lo spazio delle distribuzioni è un effettivo ampliamento di $L^1_{loc}$

Proviamo che

$$\mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}.$$

A tal fine è sufficiente mostrare che la distribuzione  $\delta(t)$  data da

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0) \tag{4}$$

**non** appartiene a  $\mathfrak{D}^*$ . Per assurdo, sia  $\delta(t) \in \mathfrak{D}^*$ . Allora esiste  $f \in L^1_{loc}$  tale che

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \text{ per ogni } \varphi \in D. \tag{5}$$

Poiché  $f \in L^1_{loc}$ , la (5) diviene

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \langle \delta(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in D$$

ossia, per (4)

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in D. \tag{6}$$

Poiché (6) vale  $\forall \varphi \in D$ , (6) vale in particolare per le funzioni  $\varphi_n$  così definite:

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-n^2t^2)} & \text{se } |t| < 1/n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \tag{7}$$

Si osservi che tutte le funzioni  $\varphi_n$  appartengono a  $D$  e inoltre

$$\varphi_n(0) = 1, \quad 0 \leq \varphi_n(t) \leq 1.$$

Allora la (6) per le funzioni  $\varphi_n$  diviene

$$\int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt = 1. \quad (8)$$

Mostriamo che tale uguaglianza è assurda. Infatti si ha

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)| \varphi_n(t) dt$$

da cui, poiché  $0 \leq \varphi_n(t) \leq 1$ ,

$$\left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)| dt. \quad (9)$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1/n}^{1/n} |f(t)| dt = 0,$$

in quanto l'ampiezza dell'intervallo di integrazione tende a zero e  $f \in L_{loc}^1$ . Allora da (9) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{-1/n}^{1/n} f(t) \varphi_n(t) dt \right| = 0.$$

Pertanto il primo membro di (8) può essere reso piccolo a piacere e quindi **NON** può essere uguale a 1. Nella prossima lezione proveremo che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono anche distribuzioni, ad esempio  $\delta(t), \delta(t-a)$ , che **non** possono essere definite tramite funzioni di  $L_{loc}^1$ , e quindi che non appartengono a  $\mathfrak{D}^*$

Pertanto si ha

$$L_{loc}^1 \sim \mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}$$

i.e.  $\mathfrak{D}^*$  è strettamente contenuto in  $\mathfrak{D}$ , in quanto, come si è appena affermato, le distribuzioni  $\delta(t), \delta(t-a)$ , prima considerate, non sono elementi di  $\mathfrak{D}^*$ .