

ANALISI MATEMATICA III

ELM+TEM

A.A. 2013-2014

Traccia delle lezioni del 5 e 7 maggio 2014

May 7, 2014

1 Le distribuzioni come estensione dello spazio

L_{loc}^1

Ricordiamo quanto visto nella lezione precedente. Si chiama *spazio delle distribuzioni* l'insieme formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su D , dove D si chiama spazio delle funzioni test ed è definito da

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\}.$$

Lo spazio delle distribuzioni si indica con il simbolo \mathcal{D} ossia

$$\mathcal{D} = \{T : D \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Pertanto $T \in \mathcal{D}$ se :

- 1) T è un funzionale, i.e. $T : D \rightarrow \mathbb{R}$
- 2) T è lineare, ossia

$$T(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1T(\varphi_1) + c_2T(\varphi_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in D.$$

- 3) T è continuo, ossia se $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} \varphi$, allora $\{T(\varphi_n)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$.

In generale, **fissata** una funzione $f \in L_{loc}^1$, sono elementi di \mathcal{D} i funzionali del tipo

1. $T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi(t) dt$, ove φ indica una generica funzione di D .

Altre distribuzioni (i.e. elementi di \mathfrak{D}) sono poi i funzionali

2. $\Delta_0(\varphi) = \varphi(0)$

3. $\Delta_a(\varphi) = \varphi(a)$

dove a è un generico numero reale e φ è una generica funzione di D .

Usualmente i funzionali Δ_0, Δ_a vengono indicati con i simboli $\delta(t), \delta(t-a)$.

In riferimento all'Esempio 1., il valore $T_f(\varphi)$, assunto dal funzionale T , viene indicato con

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle.$$

Il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si chiama *crochet*; e la scrittura $\langle f(t), \varphi(t) \rangle$ si legge *crochet tra f e φ* .

Pertanto le distribuzioni sopra definite negli Esempi 1., 2., 3., si indicano anche con i simboli

1. Per ogni $f \in L^1_{loc}$ fissata

$$T_f(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt. \quad (1)$$

Analogamente per le distribuzioni $\delta(t)$ e $\delta(t-a)$ si ha

2.

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(0)$$

3.

$$\langle \delta(t-a), \varphi(t) \rangle =_{def} \varphi(a).$$

Nella lezione scorsa si è visto che ogni funzione appartenente allo spazio

$$L^1_{loc} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ assolutamente integrabili in ogni compatto di } \mathbb{R}\}.$$

può essere vista come distribuzione. In altre parole, se indichiamo con \mathfrak{D}^* il sottoinsieme di \mathfrak{D} formato da tutte le distribuzioni il cui *crochet* è dato da (1), ossia

$$\mathfrak{D}^* = \left\{ T \in \mathfrak{D} : \exists f \in L^1_{loc} : T(\varphi) = \langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in D \right\},$$

si è visto che il sottospazio \mathfrak{D}^* è in corrispondenza biunivoca con L^1_{loc} , ossia

$$\mathfrak{D}^* \sim L^1_{loc}$$

Pertanto le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}$, definite tramite funzioni di L^1_{loc} , ossia le distribuzioni $T \in \mathfrak{D}^*$ (i.e. quelle il cui crochet è dato da (1)) sono "tante quanti gli elementi di L^1_{loc} ".

Quindi lo spazio delle distribuzioni \mathfrak{D} può essere interpretato come una estensione di L^1_{loc} .

Si è visto poi che si tratta di una **effettiva** estensione, in quanto esistono distribuzioni, ad esempio $\delta(t), \delta(t-a)$, che **non** possono essere definite tramite funzioni di L^1_{loc} , e quindi che **non** appartengono a \mathfrak{D}^* . In altre parole \mathfrak{D}^* è strettamente contenuto in \mathfrak{D} ossia

$$L^1_{loc} \sim \mathfrak{D}^* \subsetneq \mathfrak{D}.$$

2 Convergenza nello spazio delle distribuzioni

Per analizzare le proprietà delle distribuzioni, in particolare quelle che non "provengono" da funzioni di L^1_{loc} , nella lezione scorsa abbiamo introdotto in \mathfrak{D} una nozione di convergenza. Precisamente *una successione di distribuzioni $\{T_n\}$ converge in \mathfrak{D} ad una distribuzione T se la successione numerica $\{T_n(\varphi)\}$ converge a $T(\varphi)$ per ogni $\varphi \in D$; ossia*

$$\{T_n\} \xrightarrow{\mathfrak{D}} T \quad \text{se} \quad \{T_n(\varphi)\} \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D$$

o, equivalentemente,

$$\lim_n T_n \stackrel{(*)}{=} T \quad \text{se} \quad \lim_n T_n(\varphi) \stackrel{\mathbb{R}}{=} T(\varphi) \quad \forall \varphi \in D.$$

dove il simbolo (*) significa che il limite è effettuato in \mathfrak{D} . Utilizzando tale nozione, si può provare il seguente Teorema (di rappresentazione):

Teorema - *Ogni distribuzione è limite (in \mathfrak{D}) di una successione di elementi di L^1_{loc} , ossia*

$$\overline{L^1_{loc}} = \mathfrak{D}.$$

In altre parole il Teorema precedente afferma che per ogni $T \in \mathfrak{D}$ esiste una successione $\{f_n(t)\}$, contenuta in L^1_{loc} , che converge in \mathfrak{D} (nel senso sopra specificato) alla distribuzione T .

Nel corso della lezione scorsa si è provato infine che la distribuzione $\delta(t)$ è il limite (in \mathfrak{D}) della successione $\{k_n(t)\}$, dove

$$k_n(t) = \begin{cases} n & \text{se } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

ossia

$$\delta(t) \stackrel{(*)}{=} \lim_n k_n(t)$$

dove $(*)$ significa, come appena detto, che il limite è effettuato in \mathfrak{D} .

3 Derivata di una distribuzione

Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$. Allora $f' \in L^1_{loc}$ e quindi f' può essere pensata come distribuzione e sia ha

$$\langle f'(t), \varphi(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt.$$

Utilizzando la regola di integrazione per parti si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{\mathbb{R}} f(t) \varphi'(t) dt = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle;$$

pertanto

$$f \in C^1(\mathbb{R}) \implies \langle f'(t), \varphi(t) \rangle = - \langle f(t), \varphi'(t) \rangle.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione; si chiama *derivata di T* (nel senso delle distribuzioni) e si indica con DT , la distribuzione definita da

$$\langle DT, \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} - \langle T, \varphi'(t) \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Proprietà:

- Ogni distribuzione è derivabile infinite volte.
- Se $f \in C^1(\mathbb{R}) \implies f' \equiv Df$

- Indicata con $u = u(t)$ la funzione scalino (di Heaveside)

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

si ha

$$D[u(t)] = \delta(t).$$

- $D[u(t) - u(t - a)] = \delta(t) - \delta(t - a).$
- **Teorema** - Se $f \in C^1(\mathbb{R}/\{t_0\})$ e $f, f' \in L^1_{loc}$, allora

$$f(t_0+) = \lim_{t \rightarrow t_0+} f(t), \quad f(t_0-) = \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t),$$

esistono finiti e si ha

$$Df = f'(t) + [f(t_0+) - f(t_0-)]\delta(t - t_0).$$

Ad esempio per la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 5e^{2t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ,$$

si ha

$$Df = f'(t) + 5\delta(t).$$

Il teorema precedente si estende poi immediatamente al caso in cui f sia derivabile con derivata continua in tutto \mathbb{R} , eccetto un numero finito o un'infinità numerabile di punti.

- La distribuzione $\delta(t)$ è derivabile e si ha

$$\langle \delta'(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} -\varphi'(0), \quad \forall \varphi \in D$$

$$\langle \delta''(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} \varphi''(0), \quad \forall \varphi \in D$$

.....

$$\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t) \rangle =_{\text{def}} (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall \varphi \in D.$$

In modo analogo si definiscono le derivate di $\delta(t - a).$

4 Prodotto di distribuzioni

Ricordiamo che nello spazio L^1_{loc} il prodotto non sempre è definito. Ad esempio la funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t} & \text{se } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a L^1_{loc} , ma $f^2 \notin L^1_{loc}$. Tuttavia se $f \in L^1_{loc}$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora il prodotto $f \cdot g$ è, ovviamente, definito e si ha

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D.$$

Tale relazione suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Si chiama *distribuzione prodotto* $T \cdot g$ la distribuzione definita da

$$\langle T \cdot g, \varphi \rangle = \langle T, g \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D$$

Nello spazio delle distribuzioni si definisce il prodotto soltanto nel caso precedente, i.e. quando almeno uno dei due fattori è una funzione ("tradizionale") di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. Pertanto, ad esempio, non si definiscono i simboli $\delta^2(t)$, $e^{-|t|}\delta(t)$, $(\log t)\delta(t)$, $t^{-7}\delta(t)$.

Provare che

$$\begin{aligned} e^{2t}\delta(t) &= \delta(t); \\ (t^2 + 4)\delta(t) &= 4\delta(t) \\ \sin t \delta(t - \frac{\pi}{2}) &= \delta(t - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

ESERCIZI

Verificare che

$$\begin{aligned} D[(3 + 5t)\delta'(t - 1)] &= -5\delta'(t - 1) + 8\delta''(t - 1) \\ (t - 1)\delta'(t) &= D[(\sin t)\delta'(t) - u(t)] \\ tDf &= f(t) - 4\delta(t - 2) \end{aligned}$$

dove $f(t) = t[u(t) - u(t - 2)]$.

5 Distribuzioni temperate

Si consideri lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \rightarrow 0 \text{ per } |t| \rightarrow +\infty, j, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Tale spazio si chiama *spazio delle funzioni a decrescenza rapida*. Infatti una funzione φ appartiene a tale spazio se è infinitamente derivabile e tende a zero (per $t \rightarrow \pm\infty$), insieme a tutte le derivate $\varphi^{(i)}$, più velocemente di qualunque potenza di t . Ad esempio la funzione $\varphi(t) = e^{-t^2}$ appartiene a S .

Ricordando la definizione dello spazio D delle funzioni test

$$D = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ a supporto compatto}\},$$

si ha

$$D \subsetneq S.$$

E' poi possibile definire in tale spazio una nozione di convergenza.

Ciò premesso si consideri lo spazio formato da tutti i funzionali lineari e continui definiti su S . Tale spazio si indica con il simbolo \mathfrak{S} , ossia

$$\mathfrak{S} = \{T : S \rightarrow \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Tenendo conto che

$$D \subsetneq S,$$

si ha allora

$$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D},$$

ossia \mathfrak{S} è un sottospazio di \mathfrak{D} . Gli elementi di \mathfrak{S} sono quindi particolari distribuzioni, che prendono nome di *distribuzioni temperate* e il sottospazio \mathfrak{S} si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*.

E' possibile provare che lo spazio delle distribuzioni temperate è strettamente contenuto in \mathfrak{D} . Infatti le funzioni

$$e^t, e^{-t}, \sinh t, \cosh t, e^t u(t), e^{-t} u(-t),$$

pur essendo funzioni in L^1_{loc} , e quindi distribuzioni, ossia elementi di \mathfrak{D} , **non** sono distribuzioni temperate. Pertanto lo spazio delle distribuzioni temperate è un sottospazio proprio dello spazio delle distribuzioni, ossia

$$\mathfrak{S} \subsetneq \mathfrak{D}.$$

E' possibile provare che sono distribuzioni temperate (i.e. elementi di \mathfrak{S}):

1. le funzioni $f \in L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$ (quindi, in particolare, sono distribuzioni temperate tutte le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$);
2. le funzioni $f \in L^1_{loc}$ e **a crescita lenta**, ossia tali che $\exists M, q \geq 0 :$
 $|f(t)| \leq M(1 + |t|^q)$;
3. le funzioni $f \in L^1[a, b]$ e periodiche di periodo $b - a$;
4. le distribuzioni $\delta(t)$, $\delta(t - a)$;
5. se $T \in \mathfrak{S}$ allora $DT \in \mathfrak{S}$ (in particolare quindi sono distribuzioni temperate $\delta^{(n)}(t)$, $\delta^{(n)}(t - a)$).

Si osservi che, in virtù di 2., sono distribuzioni temperate le funzioni costanti, i polinomi, le funzioni $\sin t$, $\cos t$.

Esercizio: stabilire quali delle seguenti funzioni in L^1_{loc} sono distribuzioni temperate

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^t u(t); & f_2(t) &= e^{-t} u(t) \\ f_3(t) &= e^t u(-t); & f_4(t) &= e^{-t} u(-t). \end{aligned}$$

Esercizio: Le funzioni a crescita lenta sono distribuzioni temperate, ma esistono anche distribuzioni temperate la cui crescita non è "lenta", in senso stretto. Ad esempio si provi che la funzione di L^1_{loc}

$$f(t) = e^t \cos(e^t)$$

è una distribuzione temperata. Suggerimento: si osservi che f è la derivata della funzione a crescita lenta $g(t) = \sin(e^t)$