ANALISI MATEMATICA III
A.A. 2013-2014
Traccia della lezione del 14 maggio 2014

May 14, 2014

1 Trasformata di Fourier di distribuzioni

Ricordiamo che si chiama spazio delle funzioni a decrescenza rapida lo spazio vettoriale S definito da

$$S = \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : t^j \varphi^{(k)}(t) \to 0 \text{ per } |t| \to +\infty, \; j,k = 0,1,2,.... \right\}.$$

nella scorsa lezione abbiamo poi definito le distribuzioni temperate come lo spazio dato da

$$\Im = \{T : S \to \mathbb{R}, \text{ lineare e continuo}\}$$

Si ha poi

$$\Im \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{D},$$

dove $\mathfrak{D}$ indica lo spazio delle distribuzioni. Gli elementi di $\Im$ sono quindi particolari distribuzioni, che prendono appunto nome di *distribuzioni temperate*.

ISia $\varphi \in S$. Essendo φ a decrescenza rapida, si ha $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e quindi φ ammette trasformata di Fourier. Sia pertanto Φ la sua trasformata, ossia $\Phi(\omega) = \mathcal{F}\{\varphi\}$. Usando le proprietà della trasformata di Fourier in L^1, è possibile provare che "lo spazio S è chiuso rispetto all'operatore trasformata di Fourier", ossia che vale il seguente:

Lemma - *Sia $\varphi \in S$. Allora $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ e, indicata con Φ la sua trasformata di Fourier, si ha $\Phi \in S$.*

Si ha poi il seguente:

Teorema - *Sia* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ *e sia* F *la sua trasformata di Fourier, ossia* $F(\omega) = \mathcal{F}\{f\}$. *Allora*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)\Phi(\omega)d\omega, \ \forall\varphi \in S$$

ossia

$$\langle F, \varphi\rangle = \langle f, \Phi\rangle, \ \forall\varphi \in S$$

o, equivalentemente,

$$\langle \mathcal{F}\{f\}, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale Teorema suggerisce la seguente:

Definizione - Sia T una distribuzione temperata; si chiama *trasformata di Fourier di* T (nel senso delle distribuzioni) e si indica con $\mathcal{F}_D\{T\}$, la distribuzione temperata definita da

$$\langle \mathcal{F}_D\{T\}, \varphi\rangle =_{\text{def}} \langle T, \mathcal{F}\{\varphi\}\rangle, \ \forall\varphi \in S.$$

Tale definizione riconduce quindi il calcolo della trasformata $\mathcal{F}_D$ a quello della trasformata "classica" $\mathcal{F}$ (i.e. in L^1 o L^2).

Dal Teorema precedente si ha poi la seguente proprietà

- Se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora $\mathcal{F}_D\{f\} \equiv \mathcal{F}\{f\}$,ossia se $f \in L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$ allora la trasformata nel senso delle distribuzioni di f coincide con quella "classica".

La definizione precedente acquista quindi significato per gli elementi che **non** appartengono a $L^1(\mathbb{R}) \cup L^2(\mathbb{R})$.

2 Trasformata di Fourier di distribuzioni temperate "elementari"

La seguente tabella, provata a lezione, fornisce la trasformata di Fourier, nel senso delle distribuzioni, di alcune funzioni"elementari" a crescita lenta

$(A \in \mathbb{R})$:

funzione $\rightarrow$	trasformata
1	$2\pi\delta(\omega)$
t	$2\pi j\delta'(\omega)$
t^n	$2\pi j^n\delta^{(n)}(\omega)$
e^{jAt}	$2\pi\delta(\omega - A), \qquad A \in \mathbb{R}$
$\sin(At)$	$\pi j[\delta(\omega + A) - \delta(\omega - A)], \qquad A \in \mathbb{R}$
$\cos(At)$	$\pi[\delta(\omega + A) + \delta(\omega - A)], \qquad A \in \mathbb{R}$

Per la distribuzione $\delta(t)$ si ha poi

$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t)\right\} = 1$$
$$\mathcal{F}_D\left\{\delta(t-a)\right\} = e^{-ja\omega},\ a \in \mathbb{R}.$$

Vale infine la proprietà

$$\text{Se } T \text{ è una distr. temperata, allora} \quad \mathcal{F}_D\left\{DT\right\} = j\omega\mathcal{F}_D\left\{T\right\}. \tag{1}$$

Esercizio: Utilizzando i crochets, provare (1).
Esercizio: Calcolare la Trasformata di Fourier delle distribuzioni

$$T_1 = \sin(t+1)\delta(t);\ T_2 = t\delta'(t-1);\ T_3 = D(e^{t-3}\delta(t));$$
$$T_4 = D(e^{t}\delta(t-3));\ T_5 = e^{t-3}\delta'(t); T_6 = e^{5t}\delta'(t-1) + \delta'(t-2).$$