APPLICAZIONI di MATEMATICA
A.A. 2014-2015

Tracce delle lezioni del 22 e 26 settembre 2014

September 26, 2014

1 Richiami sui numeri complessi

1.1 Forma algebrica.

Un numero complesso z in forma algebrica è un numero del tipo

$$z = a + jb$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e j, detta *unità immaginaria*, gode della proprietà

$$j^2 = -1.$$

I numeri a e b sono detti, rispettivamente, *parte reale* e *parte immaginaria* di z e si indicano con

$$a = \mathrm{Re} z, b = \mathrm{Im} z.$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$. Poiché ogni numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali, esso può essere rappresentato come punto del piano. Per tale motivo l'insieme $\mathbb{C}$ è chiamato anche piano complesso. I numeri z per cui $b = 0$ sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ e l'insieme di tali punti è chiamato *asse reale*. Analogamente, i numeri z per cui $a = 0$ sono chiamati *immaginari (puri)* e l'insieme da essi formato è detto *asse immaginario.*

L'insieme $\mathbb{C}$ è non ordinato, in quanto si può dimostrare che non è possibile definire in $\mathbb{C}$ una relazione d'ordine che sia compatibile con quella definita in $\mathbb{R}$.

Dato $z = a+jb \in \mathbb{C}$, si chiama *coniugato di* z, e si indica con $\overline{z}$, il numero

$$\bar{z} = a - jb;$$

quindi, se z è rappresentato nel piano dal punto A, il coniugato di z è rappresentato nel piano complesso $\mathbb{C}$ dal punto simmetrico di A rispetto all'asse reale. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
\overline{z \pm s} &= \overline{z} \pm \overline{s} \\
\overline{zs} &= \overline{z}\ \overline{s} \\
\overline{\left(\frac{z}{s}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{s}} \qquad \text{se } s \neq 0.
\end{aligned}$$

Si chiama poi *modulo di* z, e si indica con $|z|$, il numero

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Valgono le seguenti relazioni tra $z, \bar{z}, |z|, \mathrm{Re}\ z, \mathrm{Im}\ z$:

$$\begin{aligned}
z\ \bar{z} &= |z|^2 \\
\mathrm{Re}\ z &= (z + \bar{z})/2 \\
\mathrm{Im}\ z &= (z - \bar{z})/2j.
\end{aligned}$$

1.2 Operazioni algebriche

Le operazioni algebriche in $\mathbb{C}$ seguono le ordinarie regole del calcolo algebrico, con l'avvertenza che $j^2 = -1$. Pertanto, posto $z = a + jb, s = c + jd$, si ha

$$\begin{aligned}
z + s &= (a + c) + (b + d)j \\
z - s &= (a - c) + (b - d)j \\
zs &= (ac - bd) + (bc + ad)j \\
\frac{z}{s} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \ (\text{se } s \neq 0).
\end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio non costante ha almeno una radice in $\mathbb{C}$. Questa proprietà, nota sotto il nome di Teorema fondamentale dell'algebra o di D'Alembert, è una delle principali motivazioni dell'introduzione dell'insieme dei numeri complessi e sarà provata successivamente.

1.3 Forma trigonometrica di un numero complesso.

Dato $z \neq 0, z \in \mathbb{C}$, si chiama *argomento di* z, e si indica con $\arg z$, l'angolo θ (con segno) che il raggio vettore forma con l'asse reale positivo. Se $z = a + jb$, indicando con ρ il modulo di z, risulta quindi:

$$z = a + jb = \rho(\cos\theta + j\sin\theta).$$

Le formule di passaggio sono:

$$\begin{aligned} a &= \rho\cos\theta \\ b &= \rho\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{se } a > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{se } a < 0, \\ \pi/2 & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } a = 0, b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.4 Formule di De Moivre.

Dati $s_1, s_2 \in \mathbb{C}$, le formule di De Moivre danno una espressione particolarmente semplice del loro prodotto e del loro rapporto. Esprimendo s_1 e s_2 in forma trigonometrica, $s_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$, $s_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$, $s_2 \neq 0$, si ha

$$\begin{aligned} s_1 s_2 &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + j\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{s_1}{s_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + j\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Tali formule possono essere iterate; in particolare possiamo ottenere l'espressione di una qualunque potenza di un dato numero complesso $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

A titolo di esercizio si verifichi che

$$\left(\sqrt{3} + j\right)^6 = -64.$$

Se interpretiamo i numeri complessi come vettori piani, allora la somma o la differenza tra due numeri complessi s, z. ha, rispettivamente, il significato tradizionale di somma o differenza tra vettori. Il prodotto di un numero complesso z per un numero complesso assegnato s_0, con $z \neq 0$ e $s_0 \neq 0$, puo' essere interpretato come una rotazione del vettore z accompagnata da una omotetia (dilatazione se $|s_0| > 1$, contrazione se $|s_0| < 1$). Ad esempio jz è il vettore che si ottiene ruotando in senso antiorario di $\pi/2$ il vettore z.

1.5 Distanza in $\mathbb{C}$

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, dove la distanza $d(z, s)$ tra due numeri $z, s \in \mathbb{C}$ è data da

$$d(z, s) = |z - s|.$$

Esercizio. Verificare la relazione

$$|z + s|^2 + |z - s|^2 = 2(|z|^2 + |s|^2).$$

Tale relazione è nota come "Identità del parallelogrammo" in quanto esprime la ben nota proprietà della geometria euclidea che in un parallelogrammo la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali coincide con la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

Si chiama *intorno* di un punto z_0 in $\mathbb{C}$ di raggio δ l'insieme

$$I_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\}.$$

Geometricamente $I_\delta(z_0)$ è l'interno di una circonferenza di centro z_0 e raggio δ.

Così, ad esempio,

$$|z - 3 + 2j| < 1$$

rappresenta l'interno di una circonferenza di centro $3 - 2j$ e raggio 1, mentre

$$|z + j| > 5$$

rappresenta l'esterno di una circonferenza di centro $-j$ e raggio 5.

2 Funzioni complesse - Generalità

Posto $s = x + jy$ e $z = u + jv$ (dove x, y, u, v sono numeri reali e j indica l'unità immaginaria), sia $z = f(s)$ una funzione complessa. Tale funzione puo' essere interpretata come la trasformazione piana

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases},$$

dove $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ prendono nome, rispettivamente, di *parte reale di* f e *parte immaginaria di* f.

Ad esempio la parte reale e la parte immaginaria della funzione

$$f(s) = \frac{1}{s}$$

sono date rispettivamente da

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

La funzione f prende nome di *"inversione per raggi reciproci"* e gode della seguente proprieta': f trasforma circonferenze di centro l'origine in circonferenze di centro l'origine e ne inverte il senso di percorrenza. Inoltre f trasforma l'interno di tali circonferenze nell'esterno e viceversa.

Per esercizio si calcoli la parte reale e la parte immaginaria delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 7js + s^2 \\ f_2(s) &= s + |s|^2 \\ f_3(s) &= \frac{\overline{s}}{s - 4} \\ f_4(s) &= \frac{3}{s - |s|}. \end{aligned}$$

3 Successioni e serie

Essendo $\mathbb{C}$ uno spazio metrico, la nozione di convergenza di successioni è analoga a quella vista in $\mathbb{R}$: è sufficiente sostituire il "valore assoluto" con il "modulo". Precisamente diremo che

$$\lim_n s_n = s_0 \tag{1}$$

o, equivalentemente,

$$s_n \longrightarrow s_0$$

con $s_n, s_0 \in \mathbb{C}$ se $\forall \epsilon > 0$ esiste n_0 tale che $|s_n - s_0| < \epsilon \ \forall \ n \geq n_0$. E' facile mostrare che (1) è equivalente all'esistenza dei due limiti

$$\lim_n \operatorname{Re} s_n = \operatorname{Re} s_0, \qquad \lim_n \operatorname{Im} s_n = \operatorname{Im} s_0.$$

Poiche $\mathbb{C}$ è completo, ogni successione convergente in $\mathbb{C}$ è di Cauchy, ossia verifica

$$\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ n_0 \ : |s_n - s_m| < \epsilon \qquad \forall n, m \geq n_0$$

e viceversa.

Analogamente al caso reale, diremo poi che la serie di numeri complessi

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i$$

converge, se converge la successione $\{S_N\}$ delle somme parziali, dove

$$S_N = \sum_{i=0}^{N} s_i.$$

In particolare vale il seguente risultato "*Se la serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} |s_k|$ è convergente (in $\mathbb{R}$), allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} s_k$ è convergente in $\mathbb{C}$*".

4 Esponenziale in $\mathbb{C}$

Si chiama *esponenziale complesso* la funzione

$$e^s =_{\text{def}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + ... + \frac{s^i}{i!} + ...$$

Tale definizione è **l'estensione al campo complesso dell'esponenziale reale, è definita per ogni numero complesso** s e gode delle seguenti proprietà:

1. $e^{s+z} = e^s e^z$; in particolare:

2. $e^{x+jy} = e^x e^{jy}$. Ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni (reali) seno e coseno si ha:

3. $e^{jy} = \cos y + j \sin y, \qquad e^{-jy} = \cos y - j \sin y$ da cui, mediante somma e sottrazione, si ottengono le ben note *formule di Eulero* ($y \in \mathbb{R}$)

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j};$$

4. indicando rispettivamente con ρ e θ il modulo e l'argomento di un numero complesso $s \neq 0$ si ha che tale numero può essere rappresentato (oltreché in forma algebrica e trigonometrica) mediante la *forma esponenziale:* $s = \rho e^{j\theta}$

5. $|e^s| = e^{\mathrm{Re} s}$, $\mathrm{Arg}(e^s) = \mathrm{Im}(s)$, $\mathrm{Re}\, e^s = e^{\mathrm{Re}\, s} \cos \mathrm{Im}\, s$, $\mathrm{Im}\, e^s = e^{\mathrm{Re}\, s} \sin \mathrm{Im}\, s$

6. $e^s \neq 0$ per ogni $s \in \mathbb{C}$

7. $e^s = e^{s+2k\pi j}$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. e^s è una funzione periodica con periodo (complesso) $T = 2\pi j$.

5 Funzioni trigonometriche in $\mathbb{C}$

Si definiscono le funzioni trigonometriche seno e coseno in $\mathbb{C}$ come estensione al campo complesso delle formule di Eulero nel modo seguente:

$$\sin s =_{\mathrm{def}} \frac{e^{js} - e^{-js}}{2j}, \qquad \cos s =_{\mathrm{def}} \frac{e^{js} + e^{-js}}{2}, \qquad s \in \mathbb{C}.$$

Le principali proprietà di tali funzioni sono le seguenti.

1. Le funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ sono le estensioni al campo complesso delle corrispondenti funzioni reali;

2. Le *formule trigonometriche* note in campo reale e che non coinvolgono disuguaglianze, continuano a valere in $\mathbb{C}$. Ad esempio sono valide (e la verifica è immediata) l'identità fondamentale

   $$\sin^2 s + \cos^2 s = 1,$$

   le formule di somma, di sottrazione, di duplicazione, ecc... .

3. Le funzioni seno e coseno sono *periodiche* di periodo 2π.

4. La funzione seno è dispari, mentre la funzione coseno è pari:
$$\sin(-s) = -\sin s, \qquad \cos(-s) = \cos s.$$

5. Valgono le relazioni
$$\begin{aligned} \sin s &= \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \\ \cos s &= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y, \end{aligned}$$
da cui segue
$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re}\ \ \sin s = \sin x \cosh y, & \mathrm{Im}\ \ \sin s = \cos x \sinh y \\ \\ \mathrm{Re}\ \ \cos s = \cos x \cosh y, & \mathrm{Im}\ \ \cos s = -\sin x \sinh y. \end{array} \tag{2}$$

6. Utilizzando (2) si provi per esercizio che valgono le relazioni
$$\overline{\sin s} = \sin \overline{s}, \qquad \overline{\cos s} = \cos \overline{s}.$$

7. Le funzioni seno e coseno *assumono tutti i valori complessi.* Dunque l'equazione $\sin s = \alpha$ ammette infinite soluzioni qualunque sia $\alpha \in \mathbb{C}$, e analogamente $\cos s = \alpha$. Di conseguenza **le funzioni seno e coseno NON sono limitate in** $\mathbb{C}$.

8. Se $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$, l'equazione $\sin s = a$ ha come soluzioni *tutte e sole* le soluzioni (reali) di $\sin x = a$ in $\mathbb{R}$; analogo per il coseno. Quindi, in particolare scegliendo $a = 0$ si ha che **gli zeri delle funzioni seno e coseno in $\mathbb{C}$ coincidono con gli zeri delle corrispondenti funzioni reali.**

6 Limiti e continuità

Poiché $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico, la definizione di limite in $\mathbb{C}$ è simile a quella data in $\mathbb{R}$: è sufficiente interpretare il $|....|$ come modulo. Precisamente, data una funzione complessa $z = f(s)$ diremo che
$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|s - s_0| < \delta$ e $s \neq s_0$ si ha $|f(s) - L| < \varepsilon$.

E' facile provare che

$$\lim_{s \to s_0} f(s) = L, \qquad (L \in \mathbb{C})$$

se e solo se

$$\lim_{s \to s_0} \operatorname{Re} f(s) = \operatorname{Re} L \qquad \text{e} \qquad \lim_{s \to s_0} \operatorname{Im} f(s) = \operatorname{Im} L.$$

La funzione complessa $z = f(s)$ si dice *continua in* s_0 se

$$\lim_{s \longrightarrow s_0} f(s) = f(s_0).$$

Una funzione f è continua in s_0 se e solo se sono continue in (x_0, y_0) [dove $s_0 = x_0 + jy_0$] la parte reale $u(x, y)$ e la parte immaginaria $v(x, y)$. Somma, differenza, prodotto e quoziente di due funzioni continue sono funzioni continue (nel caso del quoziente sono **esclusi** i punti in cui il denominatore si annulla).

Poichè $\mathbb{C}$ è non ordinato, non è possibile estendere al piano complesso il concetto di funzione monotona e le relative proprietà viste nell'ambito dell'analisi reale.

7 Derivabilità e analiticità

7.1 Definizioni

DEF. 1 - *Una funzione f, definita in un intorno di un punto s_0, si dice* ***derivabile*** *in s_0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale*

$$\lim_{s \to s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}$$

e tale limite si indica con il simbolo $f\,'(s_0)$.

Esempi: per le funzioni

$$f(s) = 1, g(s) = s, h(s) = s^2$$

si ha rispettivamente

$$f'(s) = 0, g'(s) = 1, h'(s) = 2s.$$

In generale, è possibile provare che, se $n \in \mathbb{N}$, allora

$$f(s) = s^n \Longrightarrow f'(s) = ns^{n-1}.$$

Le funzioni $f(s) = \overline{s}, g(s) = |s|$ non sono derivabili in $s_0 = 0$.

DEF. 2 - *Sia Ω un insieme aperto del piano complesso. Una funzione f si dice* ***analitica*** *in Ω [e si scrive $f \in C^1(\Omega)$] se f è derivabile in tutto l'insieme Ω ed ha derivata continua.*

7.2 Teorema di Cauchy-Riemann

Vale il seguente importante risultato:

Teorema di Cauchy-Riemann. *Sia Ω un insieme* ***aperto*** *del piano complesso. Una funzione f è analitica in Ω* ***se e solo se*** *le funzioni $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ sono derivabili parzialmente rispetto a x e y [dove, al solito, $s = x + jy$] con derivate continue e verificano in tutto Ω le relazioni*

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= v_y(x, y) \\ u_y(x, y) &= -v_x(x, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Inoltre si ha

$$f'(s) = u_x(x, y) + jv_x(x, y). \tag{4}$$

Le formule (3) prendono nome di *formule di Cauchy-Riemann.*

La formula (4) fornisce l'espressione della derivata di una funzione analitica. Da essa, tenendo conto di (3), è possibile ottenere altre equivalenti espressioni per la derivata. Ad esempio si ha

$$f'(s) = v_y(x, y) - ju_y(x, y).$$

Esercizi : *i)* provare che la funzione $f(s) = \overline{s}$ non è analitica in $\mathbb{C}$; *ii)* provare che $g(s) = s^2 + js$ è analitica in $\mathbb{C}$ e si ha $g'(s) = 2s + j$; *iii)* provare che $h(s) = e^s$ è analitica in $\mathbb{C}$ e si ha $h'(s) = e^s$; *iv)* provare che il Teorema di Rolle non vale in $\mathbb{C}$; *v)* sia f analitica in $\mathbb{C}$ e sia $\operatorname{Im} f \equiv 0$. Provare che f è costante; *vi)* provare che le funzioni *seno* e *coseno* sono analitiche in tutto $\mathbb{C}$ e vale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \sin s = \cos s, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \cos s = -\sin s.$$

7.3 Funzioni armoniche

Anticipiamo il seguente risultato, che sarà visto in seguito.

Teorema 1 *Sia V un intorno di s_0 e sia f una funzione, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Allora le seguenti quattro affermazioni sono* ***equivalenti****:*
-1) $f \in C^1(V)$ [i.e. f è analitica in V];
-2) le funzioni u, v ($u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$) sono derivabili parzialmente in V con derivate continue ed inoltre in V valgono le formule (di Cauchy-Riemann):

$$u_x(x, y) = v_y(x, y)$$
$$u_y(x, y) = -v_x(x, y);$$

-3) $f \in C^\infty(V)$;
-4) f è sviluppabile in serie di potenze in V.

Tale risultato mette in luce l'importanza del concetto di analiticita': l'esistenza della derivata prima continua in un intorno di un punto e' condizione (necessaria e) sufficiente per l'esistenza delle derivate di ogni ordine e anche per la sviluppabilita' in serie di potenze. Chiaramente, un equivalente risultato non vale nell'ambito delle funzioni reali di variabile reale.

Definizione *Una funzione $h : R^2 \to R, h = h(x, y)$ si dice armonica in un aperto I se in tale aperto h soddisfa l'equazione*

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0. \tag{5}$$

Teorema 2 *Sia f analitica in un intorno I di un punto s_0. Allora le funzioni*

$$u = \operatorname{Re} f, \qquad v = \operatorname{Im} f$$

sono funzioni armoniche in tale intorno, ossia in tale intorno verificano l'equazione

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

La dimostrazione è un'immediata conseguenza del Teorema di Cauchy-Riemann e del Teorema 1. Per il Teorema 1, le derivate parziali u_x, u_y, v_x, v_y sono a loro volta derivabili. Allora derivando rispetto ad x la prima delle formule (3) e rispetto ad y la seconda delle formule (3) e sommando membro a membro si ottiene il primo asserto. Il secondo asserto segue in modo analogo, derivando rispetto ad y la prima delle formule (3) e rispetto ad x la seconda.