

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2014-2015

Traccia delle lezioni del 10 e 17 ottobre 2014

October 17, 2014

1 Residui

Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora, come si è visto, esiste un intorno V di s_0 tale che f è analitica in $V/\{s_0\}$ e f è sviluppabile in serie di Laurent in tale intorno, ossia $\forall s \in V/\{s_0\}$ si ha

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (s - s_0)^n$$

dove

$$c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - s_0)^{n+1}} ds \quad (1)$$

e γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo, interna all'intorno V e contenente al proprio interno il punto s_0 .

Si chiama *Residuo di f in s_0* , e si indica con $\text{Res}[f, s_0]$ il numero

$$\text{Res}[f, s_0] = c_{-1}$$

dove c_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent associata, relativo al termine $(s - s_0)^{-1}$.

Da (1) ne segue allora

$$Res[f, s_0] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f(s) ds.$$

Il Teorema di Cauchy, visto nelle lezioni scorse, può allora essere riformulato nel modo seguente:

1° Teorema dei Residui *Sia Γ una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo. Sia f analitica all'interno di Γ eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, \dots, s_N$. Sia infine f continua su Γ . Allora*

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds = Res[f, s_1] + Res[f, s_2] + \dots + Res[f, s_N].$$

2 Formule per il calcolo dei Residui

Si ha:

$$\begin{aligned} s_0 \text{ sing. eliminabile} &\implies Res[f, s_0] = 0; & (*) \\ s_0 \text{ polo semplice} &\implies Res[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s) \\ s_0 \text{ polo ordine } N > 1 &\implies Res[f, s_0] = \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{1}{(N-1)!} \frac{d^{N-1}}{ds^{N-1}} [(s - s_0)^N f(s)] & (**) \end{aligned}$$

Si osservi che il viceversa dell'implicazione (*) può essere falso. Ad esempio la funzione

$$f(s) = \frac{1}{s^3} \tag{2}$$

ha in $s = 0$ un polo del terzo ordine. Poiché lo sviluppo in serie di Laurent di f in un intorno di $s = 0$ **coincide** con (2) (ricordiamo che tale sviluppo è una serie di potenze di s , con esponente positivo o negativo), si ha $c_{-1} = 0$ e, di conseguenza, $Res[f, 0] = 0$. Alla stessa conclusione si può giungere utilizzando la formula (**).

Si osservi infine che se s_0 è un polo semplice per f allora necessariamente il limite

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (s - s_0) f(s)$$

esiste finito e non nullo. Pertanto, in tal caso $Res[f, s_0] \neq 0$. Se invece s_0 è un polo di ordine $N > 1$, allora può aversi $Res[f, s_0] = 0$. Si dia un esempio in proposito.

Esempio n. 1 Calcolare $(\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{2s+1}{s(s+4)(s+1)^2} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -1$. Si ha poi che $s = 0$ è un polo semplice e $s = -1$ è un polo doppio. Pertanto

$$I_1 = Res[f, 0] + Res[f, -1]$$

e

$$Res[f, 0] = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s+1}{(s+4)(s+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$Res[f, -1] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} [(s+1)^2 f(s)] = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \frac{2s+1}{s(s+4)} = \frac{-4}{9}.$$

Esempio n. 2 Calcolare $(\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^3 + 6s^2 + 8s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda interne a γ sono $s = 0$ e $s = -2$. Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = -2$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = Res[f, 0] + Res[f, -2]$$

e

$$Res[f, 0] = 0$$

$$Res[f, -2] = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)f(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{\sin s}{s(s+4)} = \frac{\sin 2}{4}.$$

Esempio n. 3 Calcolare $(\gamma(t) = 8e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{\sin s}{s^2 - 7s} ds.$$

Soluzione: le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ e $s = 7$. Entrambe sono interne a γ . Si ha poi che $s = 0$ è eliminabile e $s = 7$ è un polo semplice. Pertanto

$$I_2 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 7]$$

e

$$\text{Res}[f, 0] = 0$$

$$\text{Res}[f, 7] = \lim_{s \rightarrow 7} (s - 7)f(s) = \lim_{s \rightarrow 7} \frac{(s - 7) \sin s}{s(s - 7)} = \frac{\sin 7}{7}.$$

Esempio n. 4 Provare che $(\gamma(t) = 3e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{s}{e^{2s} - 1} ds = 0.$$

Esempio n. 5 Provare che $(\gamma(t) = 5e^{jt}, t \in [0, 2\pi])$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4}{(s - 4)^2 s} ds = 0.$$

Soluzione: le singolarità sono $s = 4$ (polo semplice); $s = 0$ (eliminabile); $s_k = 2k\pi j$, $k \neq 0$, (poli semplici); $s = \infty$ (non isolata).

3 Serie di Laurent all'infinito

Si consideri

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{e^{1/s}}{(s - 1)s} ds, \quad (3)$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Le singolarità della funzione integranda (interne a γ) sono $s = 0$ e $s = 1$. Entrambe sono, ovviamente, isolate e $s = 1$ è un polo semplice, mentre $s = 0$ è essenziale. Per calcolare il $\text{Res}[f, 0]$, e di conseguenza I , le formule viste in precedenza, non sono utilizzabili. In questo caso possiamo procedere estendendo il Teorema di Laurent all'infinito e introducendo il concetto di Residuo all'infinito. Precisamente:

Teorema di Laurent in $s = \infty$

Sia f analitica all'ESTERNO di una circonferenza di centro l'origine e raggio R (sufficientemente grande). Allora per s tale che $|s| > R$ si ha

$$f(s) = \underbrace{\dots \frac{d_{-k}}{s^k} + \dots + \frac{d_{-1}}{s} + d_0}_{(+)} + \underbrace{d_1 s + \dots + d_k s^k + \dots}_{(*)} \quad (4)$$

dove i coefficienti d_k (chiamati coefficienti di Laurent all'infinito) sono dati dalla formula

$$d_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(s)}{s^{k+1}} ds, \quad (5)$$

dove Γ è una circonferenza percorsa una sola volta in senso positivo, di centro l'origine e raggio $R_1 > R$.

La serie (4) prende nome di *serie di Laurent all'infinito*. Tale serie è **formalmente** analoga alla serie di Laurent in $s = 0$, ma solo formalmente. Infatti quest'ultima converge in un intorno di $s = 0$, mentre la serie di Laurent all'infinito (4) converge per $|s|$ grande.

La serie (+) in (4) si chiama *parte analitica* della serie di Laurent all'infinito e la parte (*) *parte principale*. Quindi all'infinito parte analitica e parte principale "si scambiano" (eccetto d_0).

4 Residuo all'infinito

Definizione. Sia f analitica per $|s|$ sufficientemente grande, i.e. per $|s| > R$. Questo fatto implica che $s = \infty$ è una singolarità isolata per f oppure un punto di regolarità. Si chiama *Residuo di f all'infinito*, e si indica con $\text{Res}[f, \infty]$, il numero

$$\text{Res}[f, \infty] = -d_{-1}$$

dove d_{-1} è il coefficiente della serie di Laurent all'infinito (4), relativo al termine s^{-1} .

Da (5) si ha allora

$$\text{Res}[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(s) ds$$

dove Γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice, chiusa, percorsa in senso positivo che contiene al proprio interno **tutte** le singolarità al finito di f .

I concetti di Residuo all'infinito e Residuo al finito presentano differenze **sostanziali**. Ad esempio $s = \infty$ può essere una singolarità eliminabile (oppure un punto di regolarità) ed aversi

$$\text{Res}[f, \infty] \neq 0$$

il che al finito NON può accadere. E' sufficiente, ad esempio, considerare la funzione

$$f(s) = \frac{5}{s} + \frac{7}{s^2}$$

per la quale si ha $\text{Res}[f, \infty] = -5 \neq 0$, eppure $s = \infty$ è uno zero per f .

Inoltre $s = \infty$ può essere un polo semplice ed aversi

$$\text{Res}[f, \infty] = 0$$

il che al finito NON può accadere. E' sufficiente considerare la funzione

$$g(s) = 4s + 8$$

per la quale si ha $\text{Res}[g, \infty] = 0$, eppure $s = \infty$ è un polo semplice per g .

2° Teorema dei Residui *Sia f analitica in tutto il piano complesso eccetto un numero FINITO di punti $s_1, s_2, \dots, s_N$. Allora la somma di tutti i Residui, compreso il Residuo all'infinito, è nulla, ossia*

$$\text{Res}[f, s_1] + \text{Res}[f, s_2] + \dots + \text{Res}[f, s_N] + \text{Res}[f, \infty] = 0.$$

5 Formule per il calcolo del Residuo all'infinito.

Per quanto visto, il $\text{Res}[f, \infty]$ è definito se e solo f è analitica per $|s|$ sufficientemente grande o, EQUIVALENTEMENTE, se e solo se $s = \infty$ è una singolarità isolata per f oppure un punto di regolarità.

Il $\text{Res}[f, \infty]$ non è pertanto definito quando $s = \infty$ è una singolarità non isolata (di accumulazione) per f .

Sia p un intero positivo. Diremo poi che $s = \infty$ è *uno zero di ordine p per f* se f è analitica per $|s|$ sufficientemente grande, $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$ e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^p f(s) \quad \text{esiste finito e non nullo.} \quad (6)$$

Utilizzando la serie di Laurent all'infinito, si può provare che $s = \infty$ è *uno zero di ordine p per f* se e solo se lo sviluppo di Laurent all'infinito è del tipo

$$f(s) = \frac{d_{-p}}{s^p} + \frac{d_{-p-1}}{s^{p+1}} + \frac{d_{-p-2}}{s^{p+2}} + \dots, \text{ con } d_{-p} \neq 0.$$

Infine si osservi che la condizione (6) è equivalente alla seguente

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f^{(i)}(s) = 0 \text{ per } i = 0, 1, \dots, N-1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} f^{(N)}(s) \text{ esiste finito e non nullo.}$$

Pertanto la condizione (6) implicitamente contiene anche la condizione precedente $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s) = 0$.

Teorema 1 *Sia f analitica per $|s|$ grande. Allora se $s = \infty$ è uno zero per f di ordine $p \geq 2$, si ha*

$$\text{Res}[f, \infty] = 0.$$

Teorema 2 *Sia f analitica per $|s|$ grande. Allora*

$$\text{Res}[f, \infty] = -\text{Res}[g(u), 0], \quad (7)$$

dove

$$g(u) = f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{u^2}, \quad (8)$$

Si osservi che il Teorema 2 riconduce il calcolo del residuo all'infinito al calcolo del residuo al finito (in zero) della funzione "ausiliaria" g .

6 Esercizi

◆ 1) Calcolare

$$I_1 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4}{(s-4)^2 s} ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Le singolarità della funzione integranda sono $s = 0$ (polo semplice) e $s = 4$ (polo doppio). Sono entrambe interne a γ e quindi, per il primo Teorema dei Residui si ha

$$I_1 = \text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4].$$

Applicando il secondo Teorema dei Residui si ha anche

$$\text{Res}[f, 0] + \text{Res}[f, 4] + \text{Res}[f, \infty] = 0$$

e quindi

$$I_1 = -\text{Res}[f, \infty].$$

Poiché f ha in $s = \infty$ uno zero triplo, ne segue $\text{Res}[f, \infty] = 0$ e quindi

$$I_1 = 0.$$

◆ 2) Calcolare

$$I_2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{ds}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)(s-10)},$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_2 = \text{Res}[f, 1] + \text{Res}[f, 2] + \text{Res}[f, 3] + \text{Res}[f, 4] = -\text{Res}[f, 10] - \text{Res}[f, \infty].$$

Poiché la funzione integranda ha uno zero di ordine 5 in $s = \infty$, si ha $\text{Res}[f, \infty] = 0$. Inoltre, essendo $s = 10$ polo semplice, si ha

$$\text{Res}[f, 10] = \lim_{s \rightarrow 10} \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)} = \frac{1}{3024}$$

e quindi

$$I_2 = -\frac{1}{3024}.$$

◆ 3) Calcolare

$$I_3 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{(s+1)\sin(1/s)}{s} ds,$$

dove $\gamma(t) = 5e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$. L'unica singolarità della funzione integranda al finito è $s = 0$, che è di tipo essenziale. In $s = \infty$ la funzione integranda ha uno zero semplice. Applicando il primo e secondo Teorema dei Residui, si ha

$$I_3 = \text{Res}[f, 0] = -\text{Res}[f, \infty].$$

Da (8) si ha

$$g(u) = \frac{1+u}{u^2} \sin u$$

e poiché $u = 0$ è un polo semplice per g , si ha

$$\operatorname{Res}[g, 0] = \lim_{u \rightarrow 0} u g(u) = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u) \frac{\sin u}{u} = 1.$$

Applicando la formula (7) si ottiene:

$$\operatorname{Res}[f, \infty] = -1.$$

◆ 4) Calcolare i seguenti integrali lungo le curve indicate:

$$I_4 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{5s+1}{s^4+2} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_5 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{4s^8+3}{s^9+1} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_6 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{se^{1/s}}{(s-1)(s-3)} ds \quad \gamma(t) = 6e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

$$I_7 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{se^{1/s}}{(s-1)(s-3)} ds \quad \gamma(t) = 2e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione :

$$I_4 = 0, I_5 = 4, I_6 = 1, I_7 = 1 - e^{1/3} 3/2.$$

◆ 5) Per ciascuna delle seguenti funzioni, stabilire:

- (i) se è applicabile il secondo Teorema dei Residui;
- (ii) se esiste il residuo all'infinito e, in caso affermativo, calcolarlo.

$$f_1(s) = \frac{e^{1/s^2}}{\sin s^2}; \quad f_2(s) = e^{1/s^2} (\sin s^2)$$

$$f_3(s) = \sin(s^2 + s^4 + 3); \quad f_4(s) = \frac{\sin(s^2 + s^4 + 31)}{s-3}.$$

7 Altre proprietà delle funzioni analitiche

Vale il seguente:

Teorema *Sia f analitica in un aperto Ω , e sia f non identicamente nulla. Allora gli eventuali zeri di f in Ω sono isolati.*

Anche questa proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale, come illustra, ad esempio, la funzione reale

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

per la quale $x = 0$ è uno zero non isolato.

Sia s_0 una singolarità isolata per f . Se s_0 è una singolarità polare, allora f è non limitata in un intorno di tale singolarità, in quanto $\lim_{s \rightarrow s_0} f(s) = \infty$. Esaminiamo ora le altre due possibilità, ossia s_0 singolarità eliminabile o polare.

- Il comportamento di una funzione nell'intorno di una singolarità eliminabile è illustrato dal seguente teorema.

Teorema . *Sia s_0 una singolarità isolata per f . Allora s_0 è eliminabile SE E SOLO SE f è limitata in un intorno di s_0 .*

Si osservi che tale proprietà non ha riscontro nell'ambito dell'analisi reale. Infatti, come è ben noto, per le funzioni reali di variabile reale la limitatezza di una funzione φ nell'intorno di un punto x_0 NON implica l'esistenza del limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$. Ad esempio, è sufficiente considerare la funzione $\varphi(x) = \sin(1/x)$, che è limitata in un intorno di $x = 0$, ma per la quale il $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ non esiste.

- Il comportamento di una funzione nell'intorno di una singolarità essenziale è illustrato dal seguente teorema.

Teorema di Casorati Sia s_0 una singolarità essenziale per f . Allora per ogni numero complesso α , esiste una successione $\{s_n\}$ convergente a s_0 , tale che la successione trasformata $\{f(s_n)\}$ converge ad α .

In altre parole, il Teorema di Casorati esprime il fatto che in **ogni** intorno di una singolarità essenziale la funzione approssima, **con la precisione voluta**, un **qualunque** numero complesso.

Esercizio Sia g analitica in un intorno V di s_0 . Verificare che

$$g'(s_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{g(s)}{(s - s_0)^2} ds,$$

dove γ è una curva regolare (o generalmente regolare), semplice chiusa, percorsa in senso positivo, contenuta in V e contenente all'interno il punto s_0 .

Concludiamo questa parte con un'altra proprietà delle funzioni analitiche in un insieme aperto e limitato di $\mathbb{C}$. Vale il seguente:

- **Principio del massimo e minimo modulo.** Sia $f \in C^1(A)$, dove A è un aperto e limitato del piano complesso. Sia f continua sulla frontiera ∂A dell'aperto A . Sia poi f non costante e $f(s) \neq 0$ in tutto A . Per il teorema di Weierstrass, visto nell'ambito del corso di Analisi, la funzione reale $|f(s)|$ ammette massimo e minimo in $\bar{A} = A \cup \partial A$. Posto allora

$$M = \max_{s \in \bar{A}} |f(s)|, \quad m = \min_{s \in \bar{A}} |f(s)|,$$

il principio del massimo e minimo modulo afferma che M e m sono assunti da $|f|$ sulla frontiera ∂A dell'aperto A e che in **ogni** punto interno di $\bar{A}$, ossia in ogni punto di A , il modulo di f assume valori **strettamente compresi** tra tale massimo e minimo. In altre parole $\exists s_1, s_2 \in \partial A$ tali che

$$M = |f(s_1)|, \quad m = |f(s_2)|$$

(i.e. M e m sono assunti da $|f|$ sulla frontiera ∂A) e

$$m < |f(s)| < M$$

per ogni $s \in A$.