

# APPLICAZIONI di MATEMATICA

## A.A. 2014-2015

Traccia delle lezioni del 3 e 7 novembre 2014

November 7, 2014

### 1 Trasformata Zeta

Dal volume M. Marini "Metodi Matematici per lo studio delle reti elettriche", Edizioni Cedam, 1999.

- Trasformata Zeta ed equazioni alle differenze : Cap. 3.1.
- Il teorema del campionamento (cenni) - Cap. 3.14: Teorema 3.9
- Esercizi:

A) Calcolare la trasformata Zeta dei seguenti campionamenti, determinando anche il raggio di convergenza.

$$f_n = \begin{cases} 4n & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} : F(z) = \frac{8z^2}{(z^2 - 1)^2};$$
$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ e^{3n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} : F(z) = \frac{e^3}{z(1 - e^6 z^{-2})};$$
$$f_n = \begin{cases} e^{3n} & \text{se } n = 0, 5, 10, 15, 20, \dots \\ 2 & \text{se } n = 1, 6, 11, 16, 21, \dots \\ n & \text{se } n = 2, 7, 12, 17, 22, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} ; f_n = \begin{cases} \pi & \text{se } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ n & \text{se } n = 3k + 1, k \in \mathbb{N} \\ 2^n & \text{se } n = 3k + 2, k \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

A titolo di esempio si vedano anche gli esercizi negli Esempi 3.2, 3.3 e 3.4 e il relativo svolgimento.

B) Come evidenziato nel Teorema 3.2, il raggio di convergenza  $R_h$  della convoluzione discreta  $h_n = f_n * g_n$  verifica la disuguaglianza

$$R_h \leq \max \{R_f, R_g\},$$

dove  $R_f$  e  $R_g$  sono i raggi di convergenza di  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$ , rispettivamente. Nel Cap. 3.7 è fornito un esempio in cui  $R_h < R_f$  e  $R_h < R_g$ . Si costruisca un altro esempio ragionando sulle singolarità delle trasformate zeta  $F$  e  $G$ .

## 2 La Trasformata di Laplace nell'analisi di reti elettriche

- Introduzione (Cap. 1 - paragrafo 1.1).
- **Funzioni di classe  $\Lambda^1$ - Definizione 1** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Diremo che  $f \in \Lambda^1$  se:

$$1) \quad f(t) = 0 \quad \text{se} \quad t < 0; \tag{1}$$

$$2) \quad \text{esiste } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt} dt < \infty.$$

E' evidente che se  $\int_0^\infty |f(t)|e^{-xt} dt < \infty$ , allora  $\int_0^\infty |f(t)|e^{-yt} dt < \infty$  per ogni  $y > x$ . Si chiama *ascissa di convergenza di  $f$* , e si indica con  $\alpha_f$ , il numero

$$\alpha_f = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tale che } \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt} dt < \infty. \right\}.$$

Ad esempio, indicata con  $u = u(t)$  la funzione scalino, i.e.

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases},$$

si ha  $u(t) \in \Lambda^1$  e  $\alpha_u = 0$ . Per le funzioni

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{5t}u(t), & f_2(t) &= tu(t), & f_3(t) &= \sin t u(t), \\ f_4(t) &= e^{-9t}u(t), & f_5(t) &= t^2u(t), & f_6(t) &= u(t) - u(t-7) \end{aligned}$$

si ha rispettivamente

$$\alpha_{f_1} = 5, \quad \alpha_{f_2} = \alpha_{f_3} = 0, \quad \alpha_{f_4} = -9, \quad \alpha_{f_5} = 0, \quad \alpha_{f_6} = -\infty.$$

Invece la funzione

$$g(t) = \begin{cases} \exp t^2 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

non appartiene a  $\Lambda^1$ . Si veda inoltre il Cap. 1 - paragrafo 1.2, in cui la trasformata di Laplace è definita per funzioni di classe  $\Lambda$ . E' facile verificare che se  $f \in \Lambda^1$ , allora  $f \in \Lambda$ , ma in generale non vale il viceversa. Quindi la Definizione 1 data sopra risulta più generale.

- Definizione di trasformata di Laplace, comportamento all'infinito e analiticità (Cap. 1, paragrafo 1.3, Prop. 1.2, Prop. 3.1).
- Proprietà: linearità (Cap. 1 - paragrafo 1.4, Prop. 1.4), derivazione (Cap. 1 - paragrafo 1.9 Teorema 1.5), integrazione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Corollario 1.4), convoluzione (Cap. 1 - paragrafo 1.10 Teorema 1.7).
- Applicazioni a circuiti elettrici (Cap. 1.16)

### 3 Funzioni Reali Positive

- Introduzione - Cap. 2.1: tutto.
- Definizione di funzione RP e prime proprietà - Cap. 2.2: tutto (Def. 2.1, Def. 2.2, Prop.2.1, Prop. 2.2, Prop. 2.3 e tutti gli esempi)
- Funzioni razionali reali - Cap. 2.3: tutto (Teor. 2.1 ed esempi 2.6, 2.7).
- Funzioni razionali reali: la positività e il test delle 4 condizioni - Cap. 2.4: tutto (Teor. 2.2, Lemma 2.1, Osservazione 2.3, Esempi 2.8, 2.9, 2.10)
- Condizioni necessarie per la positività - Cap. 2.5: tutto (Proposizione 2.4, Esempi 2.11, 2.12).