

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2014-2015

ESERCIZI parte 3

October 17, 2014

1 Esercizi

Esercizio 1.1 - Calcolare il seguente integrale

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} f_i(s) ds$$

dove $\gamma(t) = 3e^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$ e

$$f_1(s) = \frac{s}{(e^{1/s} - 1)(s - 2)^4}; \quad f_2(s) = \frac{\sin(1/s)}{(s - 1)(s - 5)}; \quad f_3(s) = \frac{s(7s + 1)}{(s - 1)^2(s - 2)}.$$

Risposte:

$I_1 = -\text{Res}[f_1, \infty] = 0$ in quanto $s = \infty$ è zero doppio per f_1 .

$I_2 = -\text{Res}[f_2, \infty] - \text{Res}[f_2, 5]$. Poiché $s = \infty$ è zero triplo per f_2 , si ha $\text{Res}[f_2, \infty] = 0$. Pertanto

$$I_2 = -\text{Res}[f_2, 5] = -\left. \frac{\sin(1/s)}{(s - 1)} \right|_{s=5} = -\frac{\sin(1/5)}{4}$$

$I_3 = -\text{Res}[f_3, \infty] = \text{Res}[h, 0]$, dove $h(u) = u^{-2}f_3(1/u)$, ossia

$$h(u) = \frac{(7 + u)}{(1 - u)^2(1 - 2u)u}.$$

Poiché $u = 0$ è polo semplice per h , si ottiene

$$\operatorname{Res} [h, 0] = \frac{(7 + u)}{(1 - u)^2(1 - 2u)} \Big|_{u=0} = 7.$$

Esercizio 1.2 - Determinare, se esistono le funzioni analitiche F tali che

$$\operatorname{Re} F' = x - y. \quad (1)$$

Soluzione. Chiaramente, se F è analitica, allora lo è anche F' e pertanto la funzione in (1) deve essere armonica, il che può essere verificato immediatamente. pertanto, per quanto visto, tali funzioni F esistono. Ricordando che

$$F'(s) = F'(x + jy) = u_x(x, y) + jv_x(x, y)$$

si ha allora

$$u_x(x, y) = x - y$$

e, dalla prima delle formule di Cauchy-Riemann anche

$$v_y(x, y) = x - y.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{x^2}{2} - xy + c(y) \\ v(x, y) &= xy - \frac{y^2}{2} + d(x), \end{aligned}$$

dove c [d] è una arbitraria funzione della sola variabile x [y]. Dalla seconda delle formule di Cauchy-Riemann si ottiene allora

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

ossia

$$-x + c'(y) = -y - d'(x)$$

e quindi

$$-x + d'(x) = -y - c'(y). \quad (2)$$

Pertanto le due funzioni in (2) sono costanti, ossia

$$-x + d'(x) = -y - c'(y) = k_1.$$

Da qui si ottiene allora

$$d(x) = \frac{x^2}{2} + k_1x + k_2, \quad c(y) = -\frac{y^2}{2} - k_1y + k_3$$

e quindi

$$\begin{aligned} F(x + jy) &= u(x, y) + jv(x, y) = \\ &= \frac{x^2}{2} - xy - \frac{y^2}{2} - k_1y + k_3 + j \left(xy - \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + k_1x + k_2 \right). \end{aligned}$$

Poiché

$$F(x) = F(x + j0) = \frac{x^2}{2} + k_3 + j \left(\frac{x^2}{2} + k_1x + k_2 \right),$$

utilizzando il principio dell'unicità dell'estensione analitica, si ottiene

$$F(s) = \frac{s^2}{2} + k_3 + j \left(\frac{s^2}{2} + k_1s + k_2 \right). \quad (3)$$

E' immediato verificare che (3) soddisfa (1). Si osservi che F dipende da tre costanti reali, come era lecito attendersi dal momento che è stata assegnata la parte reale della derivata prima.

Allo stesso risultato si perviene anche procedendo nel modo seguente. Poniamo $F' = G$ e sia

$$A(x, y) = \operatorname{Re} G, \quad B(x, y) = \operatorname{Im} G.$$

Allora

$$A(x, y) = x - y$$

e, utilizzando il procedimento visto a lezione, si ricostruisce la funzione $G(s)$. Poiché $G(s) = F'(s)$, una integrazione fornisce le funzioni F cercate.

Esercizio 1.3 - Sia

$$\sinh s = \frac{e^s - e^{-s}}{2}, \quad \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}.$$

Calcolare, se esistono, i seguenti residui:

- 1) $\operatorname{Res} [1/\sinh s, 0]$, 2) $\operatorname{Res} [\cosh s/\sinh s, 0]$
- 3) $\operatorname{Res} [1/\sinh s, \infty]$, 2) $\operatorname{Res} [\cosh s - \sinh s, \infty]$
- 5) $\operatorname{Res} [1/(\sinh s - \cosh s), 0]$, 6) $\operatorname{Res} [(2 - 2\cosh s)^{-1}, 0]$

2 Esercizi "teorici"

Es. 1 Per le seguenti funzioni calcolare, se esiste, il residuo all'infinito

$$f_1(s) = s - |s|; \quad f_2(s) = s - 4 \exp(2s^3)$$

Es. 2 Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ avente una sola singolarità al finito in $s = 0$, di tipo essenziale. Sia inoltre $s = \infty$ uno zero triplo. Quanto vale $\text{Res}[f, 0]$?

Es. 3 Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\text{Re } f = x^2 - y$; la funzione f è analitica?

Es. 4 Si può applicare il 2° Teor. dei Residui alle funzioni

$$f_1(s) = \frac{\sin 7s}{s^2 + 9s + 8}; \quad f_2(s) = \frac{\sin 7s}{(s^2 + 9s + 8) \exp(4s)};$$
$$f_3(s) = \frac{\exp(3s)}{(s^2 + 9s + 8)(\sin 7s)} \quad ?$$

Es. 5 Siano

$$F_1(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)}; \quad F_2(s) = \frac{(s-5)(s-1)}{(s+7)(s+9)(s+11)}.$$

Le funzioni F_i sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = -7$? E in $s = \infty$?

Es. 6 Sia F una funzione razionale. Sono sviluppabili in serie di Laurent all'infinito le funzioni

$$G_1(s) = F(s)/\sin s; \quad G_2(s) = F(s)/\exp(5s) \quad ?$$

Es. 7 Sia F una funzione razionale con $F(0) = 1$. Sono sviluppabili in serie di Laurent in $s = 0$ le funzioni

$$G_1(s) = e^{1/s} F(s); \quad G_2(s) = \frac{F(s)}{s};$$
$$G_3(s) = \frac{F(s)}{\sin(1/s)}; \quad G_4(s) = e^{-1/s} F(s) \quad ?$$

Es. 8 Sia f una funzione analitica in tutto il piano complesso. Quanto vale $\text{Res}[f, \infty]$?

Es. 9 Sia f una funzione analitica all'interno della circonferenza di centro l'origine e raggio 10. Sia poi $f(s) = 6s^2 - 9s + 1$ se $s \in \gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [\pi, 3\pi/2]$. Calcolare $f(1)$ e $f(j)$.

Es. 10 Sia g analitica in un intorno V di $s = 7$ e $g'(7) = 5j$. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{g(s)}{(s-7)^2} ds$$

dove γ è una circonferenza di centro $s = 7$ contenuta in V e percorsa in senso positivo.

Es. 11 Ciascuna delle seguenti domande ha UNA E UNA SOLA RISPOSTA ESATTA. Si individui quale, giustificando la risposta.

▲ Domanda n.1 - E' applicabile il 2° Teorema dei Residui alla funzione

$$F(s) = \frac{2 + e^{1/s}}{\sin s} ?$$

- a) - No, perché F ha infinite singolarità.
- b) - Sì, perché F è limitata
- c) - No, perché $s = 0$ è sing. essenziale
- d) - Sì, perché F non è razionale.

▲ Domanda n.2 - Sia F priva di singolarità al finito e all'infinito. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) $F(0) = 0, F(1) = 1$
- b) $F(0) = 1, F(1) = 0$
- c) $F(0) = F(1)$
- d) $F(0) = 0, F(\infty) = 1$

▲ Domanda n.3 - Sia F una funzione razionale propria [i.e. $F = N/D$, con N e D polinomi tali che grado $N <$ grado D]. Sia poi $G(s) = 1/F(s)$. Allora:

- a) G ha almeno una singolarità essenziale
- b) G ha almeno una singolarità polare
- c) G ha almeno una singolarità non isolata
- d) G è limitata.

Risposte							
Domande	1	2	3	4	5	6	7

Scrivere il numero della risposta sopra alla corrispondente domanda

FAC SIMILE prova intermedia di APPLICAZIONI di MATEMATICA

• *Domanda 1* Quale o quali delle seguenti funzioni è derivabile per ogni $s \in C$?

$$F_A = s - |s|, F_B = e^s - e^{2s}, F_C = (e^s - e^{2s})^{-1}$$

- 1) Nessuna delle altre risposte è vera.
- 2) F_B
- 3) F_B, F_C
- 4) F_A, F_B
- 5) Tutte e tre

• *Domanda 2* Calcolare $\text{Res}[f, \infty]$ dove

$$f(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{3s^2 + 8}{s^3 + 4s^2 + 2}$$

- 1) -1
- 2) 0
- 3) -2
- 4) -3

• *Domanda 3* La funzione

$$F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{e^z(z - \sin z)}$$

ha in $z = 0$:

- 1) una sing. essenziale
- 2) un polo doppio
- 3) un polo semplice
- 4) una sing. eliminabile

• *Domanda 4* Calcolare $\text{Res}[f, 0]$ dove

$$f(s) = \sin(1/s^2) + \frac{3}{s}$$

- 1) 3
- 2) 0
- 3) -3
- 4) 1

• *Domanda 5* Sia $z = (1 - j)^{1/4}$

- 1) $|z| = 2^{1/4}, \text{Arg}z = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, \dots, 3.$
- 2) $|z| = 2^{1/4}, \text{Arg}z = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, \dots, 3.$
- 3) $|z| = 2^{1/8}, \text{Arg}z = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k = 0, \dots, 3.$
- 4) $|z| = 2^{1/8}, \text{Arg}z = -\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, k = 0, \dots, 3.$

• *Domanda 6* Calcolare

$$I = \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma} \left[\frac{z+1}{z^2+2z-3} + z \sin z \right] dz$$

dove $\gamma(t) = 4e^{jt}, t \in [0, 2\pi]$.

- 1) -2
- 2) 2

- 3) -1
- 4) 0
- 5) 1

• *Domanda 7* Per quale o quali delle seguenti funzioni, la serie di Laurent all'infinito è priva di parte principale?

$$F_1(z) = \frac{z+4}{z-4}, F_2(z) = \frac{(z+4)e^{1/z}}{z-4}$$

$$F_3(z) = \frac{z+4}{(z-4)e^z}$$

- 1) soltanto F_1
- 2) F_1, F_3
- 3) F_1, F_2
- 4) F_2, F_3