

APPLICAZIONI di MATEMATICA

A.A. 2014-2015

ESERCIZI parte 7

December 8, 2014

Esercizi "teorici"

[E' stato corretto il testo dell'Esercizio 1.15]

Es. 1.1 - Sia F razionale, reale positiva e $F(0) = 0$. La funzione

$$G(s) = F(s - 24)$$

è RP ?

Es. 1.2 - Sia F reale, razionale e sia $F(1 + j) = -4 + j$. Allora F è RP?

Es. 1.3 Siano

$$F_1(z) = \frac{(z - 5)(z - 1)}{(z + 7)(z + 9)}; \quad F_2(z) = \frac{(z - 5)(z - 1)}{(z + 7)(z + 9)(z + 11)}.$$

F_i è una trasf. Zeta? In caso affermativo calcolare il raggio di convergenza.

Es. 1.4 Sia F una trasformata zeta e sia $f_0 = 0$. Quanto vale

$$\text{Res}\left[\frac{F(z)}{z}, \infty\right] ?$$

Es. 1.5 Sia $\{f_n\}$ una successione il cui raggio di convergenza è 1. Quanto vale il raggio di convergenza delle successioni $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, dove

$$g_n = e^{-7n} f_n; \quad h_n = e^{4n} f_n \quad ?$$

Es. 1.6 - Sia F razionale RP dispari. Quanto vale il

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} [F(s) + \frac{1}{F(s)}] ?$$

Es. 1.7 - Sia F reale, razionale pari e $F(-9) = 0$. Tale funzione può essere positiva?

Es. 1.8 - Sia F reale, razionale avente uno zero doppio in $s = \infty$. Tale funzione può essere positiva?

Es. 1.9 - Sia F una trasformata zeta. La funzione $G(z) = z^{-3}F(z)$ è una trasformata zeta? In caso affermativo, quanto vale g_1 ?

Es. 1.10 - A quale delle seguenti trasformate zeta non è applicabile il Teorema del valore finale?

$$F_1(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 + 4z + 3}; F_2(z) = \frac{z - 1}{z + 5}; F_3(z) = \frac{z - 1}{5z - 1}.$$

Es. 1.11 - Sia F una trasformata zeta. Calcolare $\text{Res}[z^{-2}F(z), \infty]$.

Es. 1.12 - Sia

$$F(z) = \frac{z^2 + 6}{z^7 - z^5 + z^3}$$

Calcolare l'antitrasf. zeta per $n = 1$ e $n = 2$.

Es. 1.13 - Sia

$$f_n = n^7 e^{-14n}$$

e sia F la sua trasformata Zeta. Calcolare

$$\text{Res}[F(z), \infty].$$

Es. 1.14 - Sia F una funzione razionale propria RP. Quanto vale

$$\text{Res}[F(s)/s, \infty] ?$$

Es. 1.15 - [Difficile] Sia F una funzione razionale dispari RP e sia $v = \text{Im} F$. Provare che per ogni zero $j\omega_0$ di F sull'asse immaginario, i.e. $F(j\omega_0) = 0$, si ha

$$v_y(0, \omega_0) > 0 .$$

Suggerimento: procedere per assurdo. Supporre dapprima che $v_y(0, \omega_0) < 0$; usando le formule di Cauchy-Riemann, il fatto che $\text{Re} F(j\omega) = 0$ e la definizione di positività si ottiene una contraddizione Supporre poi

$v_y(0, \omega) = 0$ e provare che, in tal caso, F ha uno zero almeno doppio in $j\omega_0, \dots$

Es. 1.16 - Sia F una funzione razionale RP . Può aversi per qualche $\omega \in \mathbb{R}$

$$F(7 - 5j\omega) = -3 + j ?$$

Es. 1.17 - Provare che le seguenti funzioni sono trasformate Zeta e calcolarne il raggio di convergenza

$$F_1(z) = \sin\left(\frac{2z+1}{z-1}\right) \frac{z+2}{z^8}; \quad F_2(z) = \frac{z+12}{z^8(z-6)^{14}}.$$

In entrambi i casi poi calcolare f_4 , i.e. l'antitrasformata per $n = 4$.

Es. 1.18 - L'affermazione: "Sia $F \in RP$. Allora

$$G = \frac{F}{1+F^2} \in RP."$$

- a) E' vera soltanto se F è razionale
- b) E' vera soltanto se l'equazione $F(s) = j$ non ha soluzioni
- c) E' vera soltanto se F è dispari
- d) Non è mai vera
- e) E' sempre vera.

Es. 1.19 - Sia F una trasformata Zeta con $R_f = 0$. Sia poi F non razionale. Classificare il punto $z = 0$ per F .

Es. 1.20 - Sia F una trasformata Zeta con $R_f = 0$. Sia poi

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = 1.$$

Calcolare l'antitrasformata Zeta di F .

Es. 1.21 - Sia F la trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$. Sia poi $\alpha_f = -\infty$ e $F(0) = 118$. Classificare $s = \infty$ per F .

Es. 1.20 - Sia $F(s) = e^s$. Allora quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- a) F è trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$, ma non trasf. Zeta.
- b) F è trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$, e anche trasf. Zeta.
- c) F non è né trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$, né trasf. Zeta.
- d) F è trasf. Zeta, ma non trasf. di Laplace di $f \in \Lambda^1$.