ANALISI MATEMATICA 3
A.A. 2013-2014 ESERCIZI - parte 1

March 12, 2014

1 Trasformata di Fourier

Notazione : indichiamo con $u(t)$ la funzione scalino, ossia

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire se le seguenti funzioni sono trasfomabili secondo Fourier in L^1 e/o in L^2.

$$f_1(t) = e^{-t};\ f_2(t) = e^{-t}u(t);\ f_3(t) = e^t;\ f_4(t) = e^t u(t);$$
$$f_5(t) = e^{-|t|};\ f_6(t) = e^t[u(t) - u(t-7)];\ f_7(t) = \frac{1}{t}u(t);$$
$$f_8(t) = \frac{1}{t}u(t-5);\ f_9(t) = \frac{1}{t^2}u(t);\ f_{10}(t) = \frac{1}{t^2}u(t-6);$$
$$f_{11}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-4);\ f_{12}(t) = \frac{1}{t-4}u(t-7);$$
$$f_{13}(t) = \frac{1}{(t-4)^3}u(t-7);\ f_{14}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}[u(t) - u(t-4)];$$
$$f_{15}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}u(t-4).$$

ESERCIZIO 1.2 - A quale delle funzioni di cui all'Esercizio 1.1 è applicabile il Teorema di Plancherel?

ESERCIZIO 1.3 - Si considerino le funzioni

$$\begin{aligned} g_1(t) &= 5t^2[u(t) - u(t-9)] \\ g_2(t) &= (\sin t)e^{-t^2} \\ h_1(t) &= g_1(t-4)e^{jt} \\ h_2(t) &= g_2(t+\pi)e^{-3jt}. \end{aligned}$$

Tali funzioni sono trasformabili secondo Fourier in L^1? E in L^2 ? In caso affermativo la trasformata di Fourier è continua ? E' derivabile? Se sì, quante volte?

ESERCIZIO 1.4 - Quali delle seguenti funzioni razionali sono trasformate di Fourier in L^2 ?

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{\omega + j}{\omega + 1};\ F_2(\omega) = \frac{\omega + j}{\omega^2 + 1}; \\ F_3(\omega) &= \frac{\omega + j}{\omega^2 - 1};\ F_4(\omega) = \frac{7\omega + 2}{\omega^2 + 9}; \\ F_5(\omega) &= \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^3 + 9};\ F_6(\omega) = \frac{\omega^2 + 7\omega + 2}{\omega^4 + 9}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.5 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, reale dispari e a supporto compatto. Sia F la sua trasformata di Fourier. Quanto vale $F(0)$?

ESERCIZIO 1.6 - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$, e sia F la sua trasformata di Fourier. E' vera l'affermazione

$$\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = \lim_{\omega \to 0} \omega F(\omega) \ ?$$

ESERCIZIO 1.7 - Le funzioni F_1 e F_3 definite nell'Esercizio 1.4 sono trasformate di Fourier di funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$? E le funzioni $F_1(\omega)e^{j\omega}$, $F_3(\omega)e^{-j\omega}$, $F_1(\omega - 4)$, $F_3(\omega + 1)e^{\omega}$, $F_1(\omega)e^{-\omega}$?

RISPOSTE:

Esercizio 1.1 : sono trasformabili in L^1 e in L^2 le funzioni f_2, f_5, f_6, f_{10}, f_{13}. Sono trasformabili in L^2 e non in L^1 le funzioni f_8, f_{12}. E' trasformabile in L^1 e non in L^2 la funzione f_{14}. Le altre funzioni non sono trasformabili né in L^1 né in L^2.

Esercizio 1.2 : E' applicabile alle funzioni trasformabili in L^2, ossia a f_2, f_5, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{13}.

Esercizio 1.3 : tutte le funzioni considerate ammettono trasformata sia in L^1 che in L^2. Poiché sono trasformabili in L^1, le trasformate sono funzioni continue. Applicando la proprietà della "moltiplicazione per t" e i suoi corollari, si ha che tutte le trasformate sono di classe C^∞.

Esercizio 1.4 : sono trasformate in L^2 le funzioni F_2, F_4 e F_6. Non lo sono le altre.

Esrecizio 1.7: nessuna delle funzioni indicate è trasformata di Fourier di $f \in L^1$.