

ANALISI MATEMATICA 3

A.A. 2013-2014 ESERCIZI parte seconda

March 19, 2014

1 Trasf. di Fourier

ESERCIZIO 1.1 - Stabilire se le seguenti funzioni razionali ammettono trasformata di Fourier, specificando se in L^1 e/o in L^2 .

$$\begin{aligned}f_1(t) &= \frac{1}{t^2 + 5t + 8}; & f_2(t) &= \frac{t - 2}{t^2 + 5t + 8}; \\f_3(t) &= \frac{2}{3 + 2t^2}; & f_4(t) &= \frac{t + 1}{2t^2 + 3}; \\f_5(t) &= \frac{t + 5}{t^2 + 2t - 1}; & f_6(t) &= \frac{5}{t^2 - 5t - 4}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.2 - Per le funzioni di cui all'Esercizio 1.1. che ammettono trasformata di Fourier, calcolarne la trasformata e specificare se tale trasformata $F \in L^1$ oppure $\in L^2$. Calcolare poi la trasformata di Fourier delle funzioni

$$\begin{aligned}g_i(t) &= f_i(t)e^{5jt} \\h_i(t) &= f_i(t - 9),\end{aligned}$$

dove f_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 1.1 che ammettono trasformata di Fourier.

ESERCIZIO 1.3 - Stabilire se le seguenti funzioni sono trasformate di Fourier in L^2 oppure no. In caso affermativo, calcolare l'antitrasformata di Fourier.

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \frac{2\omega^3}{\omega^2 + j}; & F_2(\omega) &= \frac{2\omega}{\omega^2 - j}; \\ F_3(\omega) &= \frac{2j}{\omega^2 + 4}; & F_4(\omega) &= \frac{2\omega^2}{\omega^2 + \omega + 6}; \\ F_5(\omega) &= \frac{1}{\omega + j}; & F_6(\omega) &= \frac{\omega - 4}{(\omega - 4)^2 + 6}; \\ F_7(\omega) &= \frac{1}{\omega^2 + \omega + 6}; & F_8(\omega) &= \frac{1}{\omega^2 + j}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 1.4 - Calcolare l'antitrasformata di Fourier di

$$G_i(\omega) = F_i(\omega)e^{3j\omega},$$

dove F_i sono le funzioni di cui all'Esercizio 1.3 che appartengono a L^2 .

ESERCIZIO 1.5 - A quale delle seguenti funzioni è applicabile il Lemma di Jordan?

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{5s^2 + 4}{s^2 + 16}; & F_2(s) &= \frac{5s^2 + 4}{s^2 - 16}; & F_3(s) &= \frac{5s + 4}{s^2 + 16}; \\ F_4(s) &= \frac{1 + s}{|s|^2}; & F_5(s) &= \frac{1}{|s|}; & F_6(s) &= \frac{js - 1}{s^2 + 4j}. \end{aligned}$$

2 Trasformata Laplace

Esercizio 2.1 Utilizzando la formula di Bromwich-Mellin e la teoria dei residui, calcolare le antitrasformate di Laplace delle seguenti funzioni razionali:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 5}; & F_2(s) &= \frac{1}{s^2 + 4s + 3}; \\ F_3(s) &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s}; & F_4(s) &= \frac{s + 2}{(s + 1)(s - 2)(s^2 + 4)}; \\ F_5(s) &= \frac{1}{(s - 1)^2(s + 2)}; & F_6(s) &= \frac{s^2 + 2s - 1}{s^3 - 2s^2 + 2s - 1}. \end{aligned}$$

Esercizio 2.2 Quale o quali delle seguenti funzioni è la trasformata di Laplace di una distribuzione?

$$G_1(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 - 4}; \quad G_2(s) = \frac{s^2 + 4}{s^2 - 4s}; \quad G_3(s) = \frac{s + 4}{s^2 - 4};$$

$$G_4(s) = \frac{s^2 + 4}{s^3 - 4}; \quad G_5(s) = \frac{s^3 + 4s}{s^2 - 4}; \quad G_6(s) = \frac{s^4 + 4}{s^2 - 4s};$$

$$G_7(s) = \frac{s}{s^4 - 4}; \quad G_8(s) = \frac{4}{s^2 - 4}; \quad G_9(s) = \frac{s^4 + 4s^2}{s^3 - 4}.$$

Esercizio 2.3 - Si considerino le seguenti funzioni. Quale o quali ammette trasformata di Laplace in senso classico? (Si assuma che tali funzioni sono nulle per $t < 0$). In caso affermativo, si determini l'ascissa di convergenza α_f .

$$f_1(t) = e^{-t^2}; \quad f_2(t) = t^7 + 14t^6;$$

$$f_3(t) = t \cos t; \quad f_4(t) = e^t \cos t^2;$$

$$f_5(t) = e^{t^2} \cos t; \quad f_6(t) = t^{-4}.$$

$$g_1(t) = \begin{cases} 21 & \text{se } t > 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

$$g_2(t) = \begin{cases} e^t \sin t & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases};$$

$$g_3(t) = \begin{cases} t^{-4} & \text{se } t > 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Soluzioni Esercizio 2.1 Per $t > 0$ si ha:

$$f_1(t) = e^{-2t} \sin t$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$$

$$f_3(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$$

$$f_4(t) = \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t$$

$$f_5(t) = \frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t)$$

$$f_6(t) = 2e^t + e^{t/2} \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$

(Tali funzioni sono inoltre nulle per $t < 0$).